

Treball de Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

Control òptim d'extracció de recursos parcialment duradors mitjançant el Principi del Màxim de Pontryagin

MEMÒRIA

20 de juny de 2019

Autor: Carme Clara Berga Mayol

Director: Enric Fossas i Colet

Convocatòria: Juliol 2019



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resum

Des dels inicis de la revolució industrial fins a les més recents fàbriques, l'optimització de processos ha estat, és i serà un dels objectius imprescindibles per al bon funcionament de les empreses i per assolir l'èxit. Tots i cada un dels processos implicats en qualsevol empresa o fàbrica requereix ésser optimitzat per tal d'aprofitar al màxim els recursos i extreure el major benefici amb el mínim possible d'aquests recursos. Avui en dia, un dels procediments que més preocupa a les empreses és l'aprofitament i extracció de recursos ja que, degut al gran creixement industrial i de la població de les darreres dècades, la seva perdurabilitat no està definida. Per aquest motiu, l'optimització dels beneficis que se n'obtenen de l'extracció d'aquests recursos és un tema de gran interès per a tota la indústria.

El present projecte pretén trobar el control òptim de l'extracció de recursos parcialment duradors mitjançant la utilització d'un principi matemàtic: el Principi del Màxim de Pontryagin. Gràcies a aquest principi, es podran obtenir les variables de control del sistema, que en aquest cas corresponen a la velocitat d'extracció del producte, que maximitzen el benefici final del procés. L'escenari sobre el qual es situarà serà una mina, situada en un mercat monopolístic, en la qual hi roman un cert producte o recurs, i el procediment que s'analitza consistirà en extreure aquest recurs, portar-ho al mercat en forma d'estoc i obtenir-ne benefici.

L'estructura del treball presenta dos gran blocs: l'anàlisi en temps continu i l'anàlisi en temps discret. En l'estudi del control òptim es començarà desenvolupant el Principi del Màxim de Pontryagin i es descriurà les dinàmiques dels estats i dels co-estats. Primer, s'analitzarà el control òptim d'una extracció de temps infinit. Després, s'estudiarà el cas de temps finit. En aquest cas, serà necessària l'efectuació de una hipòtesi sobre el possible control òptim de l'extracció. En el segon gran bloc, el de temps discret, es començarà també per un desenvolupament del Principi del Màxim de Pontryagin en versió discreta. Aleshores, es discretitzaran les variables que calgui discretitzar i procedirà a l'execució de simulacions numèriques. Per a tal d'efectuar aquestes simulacions s'utilitzarà una eina de simulació de problemes de control òptim, *Microsoft Excel Solver*, que permetrà trobar les variables de control òptimes i així maximitzar el benefici. Es realitzaran 29 simulacions i, finalment, es podran extreure les conclusions necessàries de temps discret que permetin verificar els plantejaments en temps continu.

Els resultats principals del treball són, per al temps continu, la determinació d'una clara conclusió per extraccions de temps infinit i solucions parcials per extraccions de temps finit. No obstant, per temps discret, es corroboren les solucions parcials de temps continu amb evidències numèriques, així com es determinen plantejaments plausibles per temps continu. Finalment, es deixa la porta oberta per futures investigacions i projectes sobre algorismes que usin el Principi del Màxim de Pontryagin i solucionin els casos de múltiples solucions òptimes.

Índex

1	Prefaci	9
1.1	Origen del projecte	9
1.2	Motivació	10
1.3	Requeriments previs	10
2	Introducció	11
2.1	Objectiu del projecte i preguntes de recerca	11
2.2	Abast del projecte	11
3	Recerca de la bibliografia	13
3.1	Introducció	13
3.2	Càlcul de variacions	13
3.2.1	Multiplicadors de Lagrange	14
3.3	Teoria del control òptim	15
3.4	El problema de control òptim en temps continu	16
3.4.1	El Principi del Màxim de Pontryagin en versió continua	17
3.5	El problema de control òptim en temps discret	19
3.5.1	El Principi del Màxim de Pontryagin en versió discreta	20
4	El problema en temps continu	21
4.1	Introducció	21
4.2	Desenvolupament del problema en temps continu	21
4.2.1	Explicació de les variables implicades en temps continu	21
4.2.2	El problema òptim en temps continu i desenvolupament del PMP en temps continu	23
4.2.3	Resolució del problema en temps continu per un temps infinit	27
4.2.4	Resolució del problema en temps continu per un temps finit	28
4.3	Hipòtesi del problema òptim en temps continu per temps finit	30
4.4	Conclusions en temps continu	35
5	El problema en temps discret	37
5.1	Introducció	37
5.2	Desenvolupament del problema en temps discret	37
5.2.1	Aplicació de les fórmules en temps discret	37
5.3	Resolució del problema en temps discret	38
5.3.1	Eina <i>Microsoft Excel Solver</i>	39
5.3.2	Simulacions en temps discret	40
5.3.3	Conclusions a les simulacions	43
5.4	Conclusions en temps discret	59
	Conclusions	63
	Agraïments	65
	Apèndix	67
	Bibliografia	123

Índex de figures

1	Representació gràfica de la funció asimptòtica de Q i λ_2	26
2	Representació gràfica de la funció asimptòtica de Q i λ_2 amb CI	27
3	Representació gràfica de l'extracció òptima en temps continu per temps infinit	28
4	Solució d'un sistema de primer ordre	29
5	Temps continu. Escenari 1: Extracció del recurs durant un temps T ininterromput	30
6	Temps continu. Escenari 2: Extracció del recurs durant un temps $(\frac{T-a}{2})$, pausa de temps a i extracció un altre cop durant un temps de $(\frac{T-a}{2})$	31
7	Gràfiques preu en funció de Q	44
8	Gràfiques preu en funció de N	45
9	Gràfiques de la relació entre u i x	47
10	Gràfiques de la relació entre u i Q	48
11	Gràfiques de la relació entre u i p	49
12	Gràfiques de la relació entre u i el benefici	50
13	Gràfiques de la relació entre u i σ	51
14	Gràfiques de la relació entre Q i x	53
15	Gràfiques de l'evolució del benefici en funció de T	58
16	Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 1	60
17	Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 2	60
18	Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 3	61
19	Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 4	61
20	Representació gràfica simulació casos 1, 9 i 17	73
21	Representació gràfica simulació casos 5, 13 i 21	79
22	Representació gràfica simulació casos 2, 10 i 18	83
23	Representació gràfica simulació casos 6, 14 i 22	89
24	Representació gràfica simulació casos 3, 11 i 19	93
25	Representació gràfica simulació casos 7, 15 i 23	99
26	Representació gràfica simulació casos 4, 12 i 20	103
27	Representació gràfica simulació casos 8, 16 i 24	109
28	Representació gràfica simulació cas 25	111
29	Representació gràfica simulació cas 26	113
30	Representació gràfica simulació cas 27	115
31	Representació gràfica simulació cas 28	118
32	Representació gràfica simulació cas 29	122

Índex de taules

1	<i>Valors paràmetres constants</i>	39
2	<i>Recopilació de tots els casos de simulació</i>	41
3	<i>Valors de T i N</i>	42
4	<i>Condicions de les simulacions</i>	42
5	<i>Classificació de les simulacions segons les condicions</i>	43
6	<i>Evolució de les Q_f al final de cada simulació</i>	54
7	<i>Evolució de les x_f al final de cada simulació</i>	55
8	<i>Evolució del benefici al final de cada simulació</i>	57
9	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=1$. CAS 1</i>	70
10	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=0,5$. CAS 9</i>	70
11	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 17</i>	71
12	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=30$ i $T=1$. CAS 5</i>	74
13	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 13</i>	75
14	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 21</i>	76
15	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=5$ i $T=1$. CAS 2</i>	80
16	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=5$ i $T=0,5$. CAS 10</i>	80
17	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 18</i>	81
18	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=1$. CAS 6</i>	84
19	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 14</i>	85
20	<i>Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 22</i>	86
21	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=5$ i $T=1$. CAS 3</i>	90
22	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=5$ i $T=0,5$. CAS 11</i>	90
23	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 19</i>	91
24	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=30$ i $T=1$. CAS 7</i>	94
25	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 18</i>	95
26	<i>Simulacions en condicions 3 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 23</i>	96
27	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=5$ i $T=1$. CAS 4</i>	100
28	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=5$ i $T=0,5$. CAS 12</i>	100
29	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 20</i>	101
30	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=30$ i $T=1$. CAS 8</i>	104
31	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 16</i>	105
32	<i>Simulacions en condicions 4 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 24</i>	106
33	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=10$ i $T=1$. CAS 25</i>	110
34	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=21$ i $T=1$. CAS 26</i>	112
35	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=43$ i $T=1$. CAS 27</i>	114
36	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=87$ i $T=1$. CAS 28</i>	117
37	<i>Simulacions en condicions 1 per $N=175$ i $T=1$. CAS 29</i>	120

1 Prefaci

1.1 Origen del projecte

El Treball de Final de Grau que s'exposa en aquest document continua amb la línia de recerca que es va iniciar amb el *Treball de Final de Màster* de Kalle Smit, estudiant de la Universitat de Groningen, realitzat durant el seu programa *Eramus* a l'ETSEIB (*Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, UPC*) al setembre de 2012 [1]. Treballant en el Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial conjuntament amb el Departament d'Organització d'Empreses, el títol del treball és 'The Optimal Extraction Rate of Non-Renewable Resources Using Pontryagin's Maximum Principle', que traduït en català significa 'La taxa d'extracció òptima de recursos no renovables usant el Principi del Màxim de Pontryagin'. L'objectiu principal d'aquest treball és obtenir un model que es pugui utilitzar per a la simulació en un ampli ventall de supòsits i, per tant, obtenir la taxa d'extracció òptima per a diversos escenaris. La pregunta de recerca d'aquest article és quina és la taxa d'extracció òptima d'un recurs no durador i no renovable. Aquesta taxa d'extracció s'obindrà utilitzant el model de control òptim per a diferents tipus d'interès, funcions de demanda, canvi de tecnologia, cost marginal i estructures de mercat.

Com a suport per a la continuació d'aquesta línia de treball es disposen de treballs de recerca i investigació d'Enric Fossas i Albert Corominas. En aquests treballs, la temàtica que s'enfoca és l'optimització de l'extracció de recursos no renovables. Es disposa de dos articles, [7][8], on es contrasten els estudis en temps discret vers temps continu, respectivament.

Cal recordar que la teoria sobre la qual es recolza el treball en qüestió és la teoria d'optimització i el control òptim. Per aquesta raó, s'ha disposat de diferents articles i estudis de la temàtica amb l'objectiu de consolidar una base ferma per a la posterior execució del projecte. Aquesta documentació implica tres importants universitats. El primer article fou escrit per Alan Zinober, de la Universitat de Sheffield, al maig de 2009, es titula *Notes on Optimal Control Theory* [2] i va ser redactat durant la seva estància a Barcelona mitjançant el programa *Erasmus*. El segon article s'anomena *Optimal control notes and exercises*[3][4] i va ser escrit per Ulf Jönsson, en col·laboració de Claes Trygger i Petter Ögren, al *Royal Institute of Technology* d'Estocolm, Suècia. El darrer document correspon al llibre *Optimal Control Theory, An Introduction*[5], escrit per Donald Kirk, professor emèrit d'Enginyeria Elèctrica a la Universitat Estatal de San José, Califòrnia.

L'estudi, anàlisi i simulacions del present projecte es basarà en el disseny d'un control òptim d'extracció de recurs en el cas d'un producte perible, implicant així una continuació del Treball Final de Màster de Kalle Smit i mantenint sempre una base de coneixements procedents dels articles d'Enric Fossas i Albert Corominas. S'ampliarà l'estudi del principal teorema matemàtic del treball de Kalle Smit, el Principi del Màxim de Pontryagin, s'estudiaran nous escenaris d'extracció i s'obriran les portes a futures preguntes de recerca.

1.2 Motivació

La motivació inicial per a la realització del present projecte fou l'interès de l'estudiant sobre el món de les matemàtiques aplicades a l'enginyeria i el gran potencial que tenen aquestes en la indústria en general. L'estudiant sempre s'ha vist molt atreta i aplicada per les assignatures del grau relacionades amb les matemàtiques, tals com *Càlcul*, *Àlgebra*, *Equacions Diferencials* i també *Dinàmica de Sistemes* i *Control Automàtic*. Va ser cursant aquesta darrera assignatura quan es va adonar que la matèria li interessava molt i es va motivar a indagar sobre la temàtica degut a la seva aplicació multidisciplinària en el món de l'enginyeria. És per aquesta raó que l'estudiant va acudir al professor Dr. Enric Fossas, del Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial, a la recerca d'un treball final de grau que satisfés les seves motivacions.

D'entre els molts treballs proposats pel professor, el que més va cridar l'atenció a l'estudiant va ser un treball que combinava matèries tals com el control automàtic de processos i equacions diferencials com l'optimització d'aquests mateixos, alhora que es traslladava el problema matemàtic al món real. Aquest treball fou escrit per Kalle Smit en el seu Treball de Final de Màster a l'ETSEIB [1]. El que es va proposar va ser seguir en la mateixa línia del treball, però tenint en compte la variància de certs paràmetres. Cal destacar que un dels aspectes que va ser clau per a la tria del treball per part de l'estudiant fou la possibilitat de traslladar el cas teòric plantejat al món pràctic, així com el potencial de la temàtica sobre diverses aplicacions. I així va ser com va sorgir el Treball de Final de Grau que es presenta en aquest document. Un treball que encaixa a la perfecció amb les interessos i motivacions de l'estudiant.

1.3 Requeriments previs

Tal i com s'ha esmentat en l'apartat anterior, és imprescindible haver assolit satisfactòriament els coneixements impartits a les assignatures del grau que segueixen: *Càlcul I*, *Càlcul II*, *Àlgebra*, *Geometria*, *Equacions Diferencials*, *Dinàmica de Sistemes*, *Control Automàtic* i *Optimització i Simulació*.

Els coneixements de càlcul i àlgebra es requereixen per a poder desenvolupar totes les equacions i per poder trobar solucions numèriques en qualsevol punt del problema. Els conceptes adquirits en geometria permeten identificar i analitzar les funcions gràficament, així com predir les evolucions de les variables al llarg del problema. Nocions bàsiques en resolució d'equacions diferencials són vitals per a resoldre les principals equacions que regeixen el problema. *Dinàmica de Sistemes* i *Control Automàtic* obriran les portes a l'enteniment del sistema de control òptim i el seu comportament en el projecte. I, finalment, *Optimització i Simulació* de processos permetrà interpretar i determinar l'objectiu principal del treball, que és trobar l'òptim d'una funció objectiu, alhora que també és fonamental tenir coneixements de simulació per a poder fer els anàlisis pertinents.

La teoria matemàtica en la qual es basa el projecte, el Principi del Màxim de Pontryagin, no s'ha desenvolupat a cap assignatura durant tot el grau. No obstant, a base de recerca, bona documentació i l'ajuda del director del projecte s'ha pogut assolir un coneixement sòlid sobre el teorema i el seu funcionament.

És indispensable haver-se llegit prèviament el *Treball de Final de Màster* de Kalle Smit, ja que és el treball precedent del present projecte.

2 Introducció

2.1 Objectiu del projecte i preguntes de recerca

El plantejament del problema és el següent. Es té un producte o recurs que roman dins una mina. Aquest recurs s'extreu, es porta al mercat en forma d'estoc i se n'extreu un benefici. Es suposa que es treballa sota un mercat monopolístic i que el producte o recurs és parcialment durador (té peribilitat).

L'objectiu principal del projecte és trobar el control òptim de l'extracció d'aquest recurs, parcialment durador, mitjançant el Principi del Màxim de Pontryagin. Es coneixerà que s'ha arribat a l'òptim quan el benefici final de l'extracció sigui el màxim. Per tal de maximitzar aquest benefici, s'hauran de trobar els valors i combinacions de les variables de control del sistema, que en el present projecte correspondran a la velocitat d'extracció del producte.

Un dels objectius secundaris que presenta el projecte és verificar que els plantejaments i solucions que es desenvoluparan en temps continu són plausibles en temps discret, i viceversa. Per aquest motiu, s'analitzaran les dues temporalitats per separat i s'estudiaran les conclusions de cada temps per a poder establir conclusions finals conjuntes.

D'altra banda, cal conèixer i saber utilitzar el Principi del Màxim de Pontryagin, ja que és la teoria matemàtica sobre la qual es recolzaran les solucions del projecte. Aleshores, un altre objectiu secundari del projecte és adquirir els coneixements necessaris sobre aquest principi i aplicar-los adequadament per a la correcta resolució del problema.

Per tot l'esmentat anteriorment, es fixen les preguntes de recerca següents:

- *Quin és el control òptim de l'extracció d'un recurs parcialment durador suposant un mercat monopolístic?*
- *Quina és la utilitat del Principi del Màxim de Pontryagin en problemes de control òptim?*

2.2 Abast del projecte

La hipòtesi inicial del problema situa un mercat monopolístic, com ja s'ha esmentat, on es ven un producte o recurs amb una certa peribilitat, del qual se'n vol extreure benefici de la seva extracció. Degut a la durada del projecte (1 quadrimestre) i per a simplificar els resultats finals obtinguts, no es té en compte el preu del diner per al càlcul del benefici de l'extracció. Tampoc es té en consideració restriccions sobre la variable de control i el paràmetre de la peribilitat romandrà constant per a cada simulació.

El projecte comença analitzant el problema de control òptim per temps continu. En aquesta temporalitat, s'analitzen dos escenaris ben diferenciats: temps infinit i temps finit d'extracció. S'extreuen les conclusions pertinents i es passa el problema a una temporalitat discreta per a corroborar les conclusions en temps continu, així com per solucionar les possibles problemàtiques que el temps continu deixi obertes.

Després, en el temps discret, s'utilitzen eines de simulació per problemes de control òptim (*Microsoft Excel Solver*) per a obtenir solucions numèriques dels plantejaments. Aquestes solucions permetran, com ja s'ha esmentat, resoldre preguntes sense respondre del temps continu, reafirmar les teories desenvolupades en temps continu, a la vegada que es posarà de manifest les interaccions entre totes les variables i la seva evolució al llarg del procés d'extracció.

A més a més, al final del projecte, es deixaran les portes obertes a noves línies d'investigació i recerca.

3 Recerca de la bibliografia

3.1 Introducció

Els inicis de la ara coneguda com a teoria de la optimització es remunten a l'Antiga Roma. Segons la història que Virgil va explicar a l'Eneida sobre la fundació de Cartago (al voltant de l'any 850 a. C.), quan Dido va aterrar al nord d'Àfrica, va convèncer al cap local que li vengués tantes terres com pell de bou tingués. Doncs, va tallar un tros de pell en tires tan estretes, que les va unir a elles per fer un fil continu de més de dos quilòmetres i mig. Va ser capaç llavors de tancar entre el fil de pell i el mar la terra on es va construir Cartago. Aquests fets van ser reconeguts pels Antics Grecs i es consideren les solucions més antigues conegudes relacionades amb la teoria d'optimització.

El precursor del control òptim de sistemes fou el problema de la braquistòcrona. També conegut com a "corba de descens més ràpid", consisteix en trobar el camí més curt per anar d'un punt A a un punt B de la Terra. El cos es desplaça partint del repòs i només està sotmès a la força de la gravetat, que es suposa constant, ja que no es consideren forces de fricció sobre el cos. La resposta d'aquest problema, primerament plantejat per Galileu cap a finals del segle XVII, va ser desenvolupada en les mans de Jean Bernoulli cap al 1696 i, posteriorment, perfeccionada per altres matemàtics de l'època.

També pot ser considerat com a un dels iniciadors de problemes d'optimització el problema isoperimètric. El tema es centra en trobar, d'entre totes les corbes planes tancades d'una mateixa longitud, quina és la que maximitza o minimitza l'àrea que engloba. La resolució d'aquesta qüestió va ser determinada en gran part gràcies a la contribució dels matemàtics Joseph-Louis de Lagrange y Leonhard Euler durant el segle XVII, mateixes dates que el problema de la braquistòcrona. Va ser mitjançant el descobriment d'una nova eina matemàtica que van poder contestar moltes incògnites del món matemàtic fins aleshores. Aquesta nova metodologia va ser denominada CÀLCUL DE VARIACIONS i s'explicarà amb més detall a l'apartat següent (*apartat 3.2*).

3.2 Càlcul de variacions

El càlcul de variacions és el nom que se li dona a la teoria d'optimització aplicada a integrals. El concepte es va introduir per primer cop a mitjans del segle XVIII, quan es va solucionar un problema de minimitzacions d'integrals iniciat al segle XVII, tot gràcies a l'enginy del matemàtic Jean Bernoulli al 1696. Lleugerament posterior en el temps van col·laborar-hi els matemàtics Joseph-Louis de Lagrange y Leonhard Euler, que van fer possible l'elaboració de teories referides a aquesta temàtica (problema de la braquistòcrona, problema isoperimètric...). Per a tenir una idea general sobre què planteja el càlcul de variacions i com s'adreça, a continuació s'exposa una breu explicació del concepte. El problema escalar consisteix en determinar la funció $x(t)$ que optimitzi la funció següent, anomenada funcional:

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), \dot{x}(t), t) \cdot dt \quad (1)$$

sent $f(t)$ una funció contínuament diferenciable, és a dir, $f \in C^\infty$.

És clau presentar en aquest moment un element imprescindible en aquests desenvolupament: el lema.

LEMA

Sigui $f(t)$ una funció continua en l'interval (t_0, t_f) . Si per a qualsevol funció $\eta(t) \in C^2(t_0, t_f)$ tal que $\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$,

$$\int_{t_0}^{t_f} f(t) \cdot \eta(t) \cdot dt = 0 \quad (2)$$

Lavors $f(t)$ és idènticament nul·la a l'interval $[t_0, t_f]$.

Una conseqüència d'aquest lema són les equacions d'Euler-Lagrange, imprescindibles en el desenvolupament de la teoria de l'optimització, i diuen així:

Sigui

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) \cdot dt \quad (3)$$

on $f(t)$ i $x(t)$ són funcions contínues amb derivades contínues de classe $C^2(t_0, t_f)$, que satisfan les condicions de contorn

$$x(t_0) = A; x(t_f) = B \quad (4)$$

Les funcions $x(t)$ que optimitzen la funció objectiu han de satisfer al seu torn l'equació d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (5)$$

3.2.1 Multiplicadors de Lagrange

És ben conegut que els extrems locals d'una funció es troben en punts on el gradient s'anul·la. Les segones derivades, entengui's la matriu Hessiana, proporcionen informació sobre si es tracta d'un màxim, un mínim, o cap dels dos. El cas d'extrems amb restriccions (extrems en subvarietats) es tracta mitjançant els multiplicadors de Lagrange.

Per a resoldre el càlcul d'extrems locals de $f(x)$ subjecta a les restriccions definides per $g(x) = 0$ on $g \in R^m$, es considera l'extensió de la funció f mitjançant:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad (6)$$

Els extrems de $f(x)$ subjectes a les restriccions $g(x) = 0$ es troben entre els zeros del gradient $F_x(x)$ que satisfan les restriccions. Els components del vector λ es denominen multiplicadors de Lagrange. En economia, els multiplicadors de Lagrange es relacionen directament amb el concepte econòmic de *preu ombra*. El *preu ombra* és el preu de referència que tindria una bé o producte en condicions de competència perfecta. Representa el cost d'oportunitat de produir o consumir un bé o servei.

En el problema del càlcul d'un extrem del funcional

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) \cdot dt \quad (7)$$

subjecte a restriccions donades per les equacions diferencials

$$\frac{dx_i}{dt} = \bar{f}_i(x, t) \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (8)$$

Es considera una extensió de la funció f , com en el cas anterior. Finalment, el nou funcional ve donat per:

$$J_e[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{f}_i(x, t) \cdot dt \quad (9)$$

3.3 Teoria del control òptim

El desenvolupament la teoria del control òptim data aproximadament a l'any 1950 com a resposta a problemes relacionats amb l'exploració del sistema solar. D'entre altres, un dels principals problemes tractava sobre el disseny de trajectòries òptimes per a vehicles espacials controlats per coets, on es buscava assolir el seu objectiu en un temps mínim o amb la mínima despesa de combustible. Aquesta classe de problemes poden ser interpretats com a generalitzacions del càlcul d'extrems locals d'una funció continua i derivable, a valors reals, amb o sense restriccions. En el cas en qüestió, les restriccions que s'executaran correspondran a la dinàmica pròpia que han de seguir les variables, determinada per mitjà d'equacions diferencials o sistemes de control.

Els resultats més importants que se'n va extreure van ser principalment la programació dinàmica (Richard Bellman), el control quadràtic lineal (Rudolph Kalman) i la base teòrica sobre la qual es recolzarà el projecte en qüestió: el Principi del Màxim/Mínim de Pontryagin.

La teoria del control òptim de problemes és de les més preuades i valorades quan es posa en el seu context històric. Considerada com l'últim capítol d'una història plagada d'incògnites científiques iniciada al segle XVII, es consolida com a una de les branques més potents de les

matemàtiques. Les aplicacions que en sorgeixen del control òptim en el món de l'enginyeria (també de l'economia i de la ciència en general) són innumerables, sobretot en sistemes aeronaútics, robòtica i sistemes autònoms, logística, etc. Cal destacar el gran pes que té el control òptim sobre el món de l'automatització de processos. És un dels mètodes sistemàtics més usats per al disseny de controladors per diferents motius:

- Permet resoldre un ampli ventall de problemes de control de variables que no s'han pogut solucionar a través de metodologies ad-hoc o simple intuïció. El control òptim aporta un enfoc sistemàtic i clarifica les resolucions.
- Davant les moltes solucions que poden sorgir a problemes de control, el control òptim d'aquests problemes redueix substancialment el ventall de possibilitats depenent del criteri acordat.
- La naturalesa, en si, es regula òptimament. Bregar els problemes enginyerils com a conceptes òptims és una bona opció.

El control òptim de problemes, aleshores, tracta d'escollir, d'entre tots els controls admissibles de les variables d'estat, el control que porti el sistema dinàmic des d'un estat inicial (temps inicial) a un estat final (temps final) de tal manera que l'acció de control que porta el sistema des del punt inicial al punt final aconsegueixi maximitzar o minimitzar la funció objectiu. Les lleis matemàtiques són les que controlen el comportament d'aquests sistemes de control. En el problema en qüestió d'aquest projecte es treballarà amb sistemes descrits per equacions diferencials ordinàries.

El problema del control òptim, aleshores, tracta de trobar el control admissible que pugui transferir un estat inicial a un estat final, sempre considerant el benefici més alt possible com a resultat final. En general, el temps inicial és considerat $t_0 = 0$ i el temps final pot ser conegut o no, ser finit o infinit.

3.4 El problema de control òptim en temps continu

El problema de control òptim consisteix en dissenyar una funció de control $u^*(t)$, d'entre un conjunt de controls admissibles, de tal manera que les trajectòries que siguin solucions del sistema:

$$\dot{x} = f(x, u^*, t) \quad (10)$$

optimitzin (minimitzin o maximitzin) la funció que es vol optimitzar

$$J[x(t)] = h(x_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (11)$$

subjecte a les restriccions donades per l'equació: $\dot{x} = f(x, \dot{x}, t)$

El terme $h(x_{t_f}, t_f)$ respon a imposar condicions finals sobre els estats $h(x_{t_f}, t_f) = 0$, mentre que el

segon terme $\int_{t_0}^{t_f} g d\tau$ és el funcional que es vol optimitzar. D'altra banda, la variable u^* correspon al control òptim del sistema i la variable x^* , la seva trajectòria òptima.

Aquí és on apareix la utilitat matemàtica del Principi del Màxim de Pontryagin. En l'apartat que segueix es descriu aquesta metodologia.

Cal comentar, un cop finalitzada l'explicació del funcionament del control òptim, algunes problemàtiques que planteja el senyor Jönsson en el seu article [3]. Argumenta que no té perquè haver-hi una solució òptima per a qualsevol problema. En alguns casos, la solució pot ser igual a infinit (significa que el problema no té solució), o bé el plantejament del problema no està ben definit i s'han de redefinir variables o equacions. També pot ocórrer que s'obtinguin solucions al problema però cap d'elles sigui òptima o si es troba alguna solució, aquesta es trobi als límits, llavors significaria que no s'ha executat un bon plantejament del problema. Aquest darrer problema es podria arreglar d'una manera directa reformulant el problema d'optimització.

En els apartats següents 4.4.1 i 4.5.1 s'exposaran la versió continua i la versió discreta del Principi del Màxim de Pontryagin. En el cas de temps continu, es requereixen eines matemàtiques en la mateixa línia que el càlcul d'extrems amb restriccions, tot i que van més enllà dels multiplicadors de Lagrange. Pel que respecta als termes discrets, el resultat obtingut és conseqüència de l'aplicació de les condicions de Karush-Khun-Tucker (condicions KKT).

3.4.1 El Principi del Màxim de Pontryagin en versió continua

Abans d'explicar com s'ha dissenyat el principi, es començarà amb una breu introducció sobre aquest. El Principi del Màxim de Pontryagin, obtingut l'any 1956 pel matemàtic rus Lev Pontryagin, és similar al Lagrangia (equacions d'Euler-Lagrange) en el sentit de què els dos busquen trobar l'òptim d'una funció. Mentre que les equacions d'Euler-Lagrange, mitjançant el multiplicadors de Lagrange, busquen l'òptim d'un sistema estàtic, el Principi del Màxim de Pontryagin buscarà òptims per a sistemes dinàmics.

Sigui un sistema de control descrit per la funció:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (12)$$

on $x \in R^n$ correspon a l'estat del sistema, la variable $u \in R^m$ és la variable de control i la funció f un camp vectorial continu en les variables x, u i t , diferenciable contínuament en x .

El Principi del Màxim de Pontryagin resol el següent problema. Es presenta un sistema de control dinàmic i es desitja dissenyar un controlador $u(t)$, del que en resulti una trajectòria $x(t)$, la qual vagi des del punt A a temps t_0 fins al punt B a temps t_f , maximitzant una funció objectiu. La funció que es vol optimitzar té la forma següent:

$$J[u(t)] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (13)$$

essent g una funció de valors reals, contínua en x i en u , derivable contínuament en x .

Quan es vol aplicar el PMP a un problema d'optimització, la primera funció a desenvolupar és el Hamiltonià, fonamental en aquest principi. Per simplicitat no s'estableixen restriccions sobre l'acció de control $u(t)$ i es defineix el Hamiltonià com:

$$H(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (14)$$

i es busca el control admissible de la funció $u(t)$ que transporta (x_o, t_o) a (x_f, t_f) alhora que optimitzi l'índex $J[x(t)]$, depenent sempre de les restriccions imposades per l'equació $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$.

El valor de la $u(t)$ que optimitza el resultat de la funció objectiu és un òptim del Hamiltonià quan es pressuposen totes les altres variables constants.

El Principi del Màxim de Pontryagin estableix que si u és un control admissible u^* i la seva trajectòria òptima x^* , llavors existeix un camp vectorial λ^* , anomenat co-estat, tal que:

1. x^* i λ^* compleixen les equacions diferencials següents:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}; \quad \text{dinàmica dels estats} \quad (15)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad \text{dinàmica dels co-estats} \quad (16)$$

2. L'acció de control u^* que optimitza el funcional $J[x(t)]$ satisfà:

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x, u, \lambda, t) \quad (17)$$

3. Es satisfan les condicions de frontera o de transversalitat:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p(t) \right)^T \delta x|_{t=T} + H(t) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \delta x|_{t=T} = 0 \quad (18)$$

Per a finalitzar la introducció del model matemàtic seguit en el problema, cal puntualitzar les avantatges i desavantatges que comporta l'aplicació d'aquest. Per la part que correspon als aspectes positius, destaca que permet solucionar problemes de control òptim quan la programació dinàmica ha fallat degut a la manca de derivades contínues en la funció que es vol optimitzar. També cal esmentar que s'usa sobretot quan les condicions per a verificar la optimització dels resultats són fàcils de comprovar (per exemple, no són EDO's). No obstant, si es parla de les desavantatges del seu ús, cal dir que només proporciona condicions necessàries d'òptim. Això significa que només pot ser usat per a obtenir els candidats d'òptim. Un cop els candidats han estat trobats, s'han d'investigar més profundament per a determinar si són els bons. En alguns casos, aquesta situació és anàloga de la optimització escalar, on la derivada de la condició és igual a zero i per tant aquesta condició pot ser necessària però no suficient d'òptim.

3.5 El problema de control òptim en temps discret

Es considera un problema de control òptim que vol maximitzar el funcional discret següent:

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} g(k, x_k, u_k) \quad \text{restringit a la dinàmica} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = f(k, x_k, u_k), \\ x_0 \text{ és conegut i } G(x_N) = 0 \end{array} \right\} \quad (19)$$

On la funció $G(x) \left((g_1(x), \dots, g_m(x))^T \right) \in R^m$ és tal que els gradients $\nabla g_k(x)$ són linealment independents.

Arribat a aquest punt, cal descriure d'on provenen els termes més importants de la funció que es vol optimitzar.

- En primer lloc, la funció que es vol optimitzar:

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} g(k, x_k, u_k) \quad \longleftrightarrow \quad J[x(t)] = h(x_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (20)$$

Correspon a la versió discreta del funcional J en temps continu.

- El terme $x_{k+1} = f(k, x_k, u_k)$ prové de discretitzar l'equació:

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (21)$$

- $G(x_N) = 0$ determina el lloc geomètric al que ha de pertànyer el valor final de l'estat.

Sigui $\{u_k^* | k = 0, \dots, N-1\}$ un control òptim del problema anterior. I sigui també $\{x_k^* | k = 0, \dots, N-1\}$ una trajectòria òptima d'aquest. Aleshores, existeix una variable adjunta $\{\lambda_k | k = 1, \dots, N\}$ i es satisfan alhora les equacions que es presenten a continuació:

1. Definició de la dinàmica de la variable adjunta:

$$\lambda_k = \frac{\partial H}{\partial x}(k, x_k^*, u_k^*, \lambda_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

2. Condició d'òptim per a la variable u :

$$u = u_k^* \text{ si minimitza } H(k, x_k^*, u_k^*, \lambda_{k+1}) \text{ respecte a la variable } u \quad (23)$$

3. Condició de frontera:

$$\lambda_N = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_N^*}^T v \quad (24)$$

per algun $v \in R^m$

3.5.1 El Principi del Màxim de Pontryagin en versió discreta

El Principi del Màxim de Pontryagin en versió discreta s'aplica de la forma següent.

1. Es defineix el Hamiltonià $H(k, x, u, \lambda) = g(k, x, u) + \lambda^T f(k, x, u)$.
2. Es suposen prèviament coneguts els termes (x_k^*, λ_{k+1}) , i s'optimitza el Hamiltonià per a la variable u . Com a conseqüència s'obté $u_k^* = \mu(k, x_k^*, \lambda_{k+1})$.
3. Es resol el sistema discret que segueix:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = f(k, x_k, \mu(k, x_k^*, \lambda_{k+1})) \\ y_k = \frac{\partial H}{\partial x}(k, x_k, \mu(k, x_k^*, \lambda_{k+1}), \lambda_{k+1}) \end{array} \right\} \quad (25)$$

tenint en compte les condicions inicials x_0 i les condicions finals

$$\lambda_N = \left(\frac{\partial G}{\partial x|_{x=x_N^*}} \right)^T v \quad (26)$$

i també les finals $G(x_N) = 0$.

El Principi del Màxim de Pontryagin proporcionarà les condicions necessàries que haurà de satisfer la trajectòria òptima del sistema.

4 El problema en temps continu

4.1 Introducció

L'objectiu principal d'aquesta secció és plantejar el problema de control òptim en temps continu i presentar algunes solucions parcials. S'explicaran les variables implicades, les seves equacions, les seves relacions i com s'espera que evolucionin i interactuïn al llarg del procés d'extracció. Per acabar, es desenvoluparà el problema de control òptim d'aquest projecte. Per això, s'estudiaran dos escenaris diferents: un escenari amb el temps infinit (cas ideal) i un escenari per a un temps definit (cas real). En aquest darrer cas, s'ha decidit traslladar el problema a temps discret per a poder solucionar la problemàtica.

La idea general del problema d'aquest projecte és trobar les variables de control admissible que fan possible maximitzar el benefici final del procés. En aquest cas, el procés correspon a l'acció d'extreure producte d'una mina, portar el producte al mercat i obtenir benefici econòmic d'aquest producte que es té en estoc en el mercat. Es treballarà sobre la hipòtesi d'un mercat monopolista, és a dir, tot el producte que es porti en estoc serà venut. També s'ha de tenir en consideració que la variable Q , que representa el producte en estoc, correspon a un producte perible i el grau de peribilitat (ρ) condicionarà el funcionament del sistema. La variable de control del problema serà la velocitat d'extracció del producte de la mina (x).

En el següent apartat es descriuen les variables implicades en el problema de control òptim i s'estudia el seu funcionament.

4.2 Desenvolupament del problema en temps continu

4.2.1 Explicació de les variables implicades en temps continu

DESCRIPCIÓ DE LES VARIABLES

La primera variable que es té en compte en el sistema és la **quantitat de producte que es troba dins de la mina**. Representada per x , aquesta variable fa referència a la quantitat de producte que romandrà dins la mina i el seu valor oscil·larà entre el valor inicial, x_0 , i anirà disminuint fins arribar al valor final x_f . L'evolució de la variable x serà sempre o bé constant (quan no s'extregui producte) o bé decreixent (quan s'extregui producte). D'aquesta variable se'n desconeix el total i, quan s'acabi, s'ha de parar l'extracció. Per tant, $x \geq 0$.

Paral·lelament a la quantitat de producte que roman dins la mina, és vital tenir en compte també la **quantitat de producte en estoc que es troba en el mercat**. Cal tenir present la fluctuació del producte a través dels dos escenaris. La quantitat d'estoc que està present en el mercat es representa amb el paràmetre Q . L'evolució d'aquesta variable amb el temps pot ser en dues direccions oposades: pot augmentar quan s'extregui producte (al extreure's producte de la mina, aquest va a parar directament a l'estoc de producte al mercat) o pot disminuir quan no s'extregui producte (al no haver entrada de producte a l'estoc del mercat, aquest es va consumint degut a la peribilitat del producte). Al igual que la x , $Q \geq 0$.

La variable que segueix és pràcticament la més important de tot el problema i es refereix a la variable de control del sistema, u , a la **velocitat d'extracció del producte** que es troba dins la mina. La representació d'aquesta variable es fa amb el paràmetre u . En termes pràctics, aquesta variable el que determina és la rapidesa o lentitud amb la que s'extreu el producte per a portar-se al mercat i convertir-se en estoc. Per tot això, la variable u es relacionarà amb les variables x i Q a través d'unes equacions, explicades més detalladament a l'apartat següent *Equacions de les variables en temps continu*.

Per acabar amb l'explicació de les variables en temps continu, la darrera variable que actua és el **preu del producte**, designat amb el paràmetre p . En aquest model, el preu del producte és una funció afí i decreixent de l'estoc Q . L'equació que regeix el preu del producte es mostra a l'apartat següent *Equacions de les variables en temps continu*.

EQUACIONS DE LES VARIABLES

Les equacions que modelen el sistema objecte d'estudi són les següents:

- L'equació que descriu l'**evolució del producte a la mina** és la que segueix:

$$\frac{dx}{dt} = -u \quad (27)$$

- L'equació representativa **comportament de la quantitat d'estoc al mercat** Q :

$$\frac{dQ}{dt} = u - \rho Q \quad (28)$$

El paràmetre ρ representa la **peribilitat del producte**, és a dir, la seva caducitat, el seu potencial per fer-se malbé amb el temps. Com més petit sigui el paràmetre de la peribilitat, més temps tardarà en fer-se malbé i degradar-se i, en canvi, com més gran sigui, més ràpid perdrà les seves propietats. En el problema, la peribilitat es tractarà com un paràmetre constant en tot el període de càlcul. Es farà la hipòtesi de que el producte es fa malbé (cas més realista que si es suposés que el producte es conserva sempre intacte) i que aquesta degradació del producte serà constant, no variarà durant una mateixa simulació. Les unitats que tindrà el paràmetre de la peribilitat són [1/unitats de temps].

- L'equació que determina el **preu del producte** és la que es mostra a sota. Suposarem que és una funció afí en Q i decreixent.

$$p(Q) = p_m - m \cdot (Q - Q_{min}) \quad (29)$$

La única variable de la que depèn el preu és de la Q , com ja s'ha mencionat, ja que els paràmetres p_m , m i Q_{min} seran constants en tot el problema. El paràmetre p_m representa el preu del producte quan $Q = Q_{min}$. El paràmetre m és el coeficient de pèrdua-increment del preu i fa referència a la mesura amb la què el preu va variant el seu valor. En altres paraules, és el pendent de la recta del preu. Finalment, Q_{min} es refereix a l'estoc mínim del producte en el mercat, el qual provocarà el preu màxim d'aquest producte. No és pèrdua de generalitat suposar $Q_{min} = 0$

Fins aquí l'explicació de cada una de les variables implicades en el desenvolupament del problema de control òptim en temps continu. A continuació, es segueix amb l'aplicació del Principi del Màxim de Pontryagin i es busca la solució òptima del problema.

4.2.2 El problema òptim en temps continu i desenvolupament del PMP en temps continu

Un cop definides totes les variables, les seves equacions, les seves relacions i una breu especulació de com evolucionaran al llarg del problema, es segueix amb el procediment i s'ajusten aquestes equacions i variables al problema d'optimització d'aquest projecte.

Les solucions del problema que es buscaran en aquest cas seran velocitats d'extracció del producte per a maximitzar el benefici obtingut al extreure el producte i vendre'l al mercat. Es pressuposa que tot el producte que s'extreu a temps t , es ven a temps t al preu $p(t)$. Val la pena fer notar que les despeses d'extracció i altres ja s'han descomptat del preu. Dit d'una altra manera, el producte que s'extreu en l'interval de temps $[t_0, t_f]$ reporta un benefici igual a:

$$B = \int_{t_0}^{t_f} u(\tau) \cdot p(Q(\tau)) \cdot e^{-i\tau} d\tau \quad (30)$$

El temps d'extracció anirà generalment des d'un temps $t_0 = 0$ fins a un temps t_f , tan pugui ser un temps fixat (cas més real) com un temps infinit (cas ideal). Si s'examina la funció del benefici al llarg de tot el procés d'extracció, és el resultat del producte de la velocitat d'extracció u [unitats/temps] per el preu del producte [preu/unitat] per el terme del interès del diner pel temps [temps]. Per tant, les unitats finals que en resulten són doblers. Es presenta en aquesta equació un nou terme anomenat interès compost continu ($e^{-i\tau}$). Aquest terme exponencial fa referència al preu o l'interès del diner i reflecteix l'evolució del preu del diner a mesura que s'ha anat extraient el producte en el temps.

A continuació s'aplica directament el Principi del Màxim de Pontryagin, explicat a l'apartat 4.4.1, començant per escriure el Hamiltonià:

$$H(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (31)$$

La funció $g(x, u, t)$ representa la funció que es vol optimitzar (la del benefici en aquest cas) i la funció $f(x, u, t)$ fa referència a les equacions que defineixen la dinàmica del problema, que en aquest cas seran les equacions diferencials de x i de Q (fórmules explicades i desenvolupades al final d'aquest apartat). Aleshores, aplicat al problema d'aquest projecte, el Hamiltonià prendrà la forma següent:

$$H(x, u, \lambda, t) = u \cdot p(Q) \cdot e^{-i\tau} + \lambda_1(-u) + \lambda_2(u - \rho Q) \quad (32)$$

Una vegada es té definit el Hamiltonià amb les variables del problema, cal determinar quina serà la dinàmica dels co-estats (λ_1 i λ_2) del problema:

$$(1) \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

$$(2) \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{-dp}{dt}(u \cdot e^{-it}) + \lambda_2 \rho = m u e^{-it} + \lambda_2 \rho \quad (34)$$

El primer multiplicador de Lagrange romandrà constant durant tot el procés (la seva derivada respecte al temps és igual a 0, fet que implica que tindrà un valor constant). En canvi, el segon multiplicador de Lagrange fluctuarà al llarg del procés mitjançant la formulació calculada prèviament.

Atès a la durada del desenvolupament del projecte (1 quadrimestre) i les dificultats en les que ens hem trobat, s'ha optat per presentar solucions parcials del problema. En concret, el l'interès del diner s'ha suposat nul ($i = 0$) i, aleshores, el terme de l'interès compost continu e^{-it} resulta igual a la unitat i no es té en consideració.

Per a determinar el control optim u^* , es maximitza el Hamiltonià en funció de u .

Observi's que el Hamiltonià és lineal (de fet afí) en l'acció de control. Efectivament,

$$H = u(p(Q) - \lambda_1 + \lambda_2) - \rho \lambda_2 Q \quad (35)$$

Aleshores, atès que el Hamiltonià és lineal en u , el màxim de la funció s'aconseguirà en el valors extrems de l'interval $[0, u_m]$ admissible per a u ,

$$\frac{dH}{du} = p(Q) - \lambda_1 + \lambda_2 \quad (36)$$

Per tant, els valors que optimitzen el Hamiltonià, suposant totes les variables constants llevat de u , es troben a l'extrem de l'interval on pertany u .

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{si } p(Q) - \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0 \\ u_m & \text{si } p(Q) - \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

Només s'executaran dos tipus de control per a maximitzar el benefici (0 i u_m) i es coneixerà quan s'han d'efectuar en funció de les condicions calculades. La primera opció és no extreure i la segona opció és extreure a una velocitat determinada u_m (velocitat màxima d'extracció del producte). La combinació d'aquests dos valors farà possible assolir el màxim benefici en el problema.

Atès que la u només podrà prendre dos valors constants en aquest problema, a sota es desenvolupen les dinàmiques de x , Q , λ_1 i λ_2 per ambdós escenaris.

a) Suposem que per $t \in [t_0, t_1]$, el valor que pren la variable $u = 0$. Les equacions diferencials que descriuen el problema són les següents:

$$1. \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -u|_{u=0} = 0 \quad (38)$$

$$2. \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = u|_{u=0} - \rho Q|_{u=0} = -\rho Q \quad (39)$$

$$3. \dot{\lambda}_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = 0 \quad \forall u \quad (40)$$

$$4. \dot{\lambda}_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = mu|_{u=0} + \lambda_2 \rho|_{u=0} = \lambda_2 \rho \quad (41)$$

b) Suposem que per $t \in [t_0, t_1]$, el valor que pren la variable $u = u_m$. Les equacions diferencials que descriuen el problema són les següents:

$$1. \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -u|_{u=u_m} = -u_m \quad (42)$$

$$2. \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = u|_{u=u_m} - \rho Q|_{u=u_m} = u_m - \rho Q \quad (43)$$

$$3. \dot{\lambda}_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = 0 \quad \forall u \quad (44)$$

$$4. \dot{\lambda}_2 = mu|_{u=u_m} + \lambda_2 \rho|_{u=u_m} = mu_m + \lambda_2 \rho \quad (45)$$

Nota. El desenvolupament de les equacions de les variables $Q(t)$ i $\lambda_2(t)$ es presenta a l'apèndix.

Observació: Es situa l'anàlisi durant un temps $t \in [t_0, t_1]$ i la variable de control $u(t)$ es considera constant. Les variables $Q(t)$ i $\lambda_2(t)$ evolucionen sobre el pla Q, λ_2 sobre hipèrboles, amb unes característiques o unes altres en funció de que $u = 0$ o $u = u_m$. Integrant les equacions diferencials per a Q i λ i pressuposant u constant s'obté:

$$Q(t) = \frac{u}{\rho} + e^{-(t-t_0)\rho} \left(Q(t_0) - \frac{u}{\rho} \right)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{-mu}{\rho} + e^{(t-t_0)\rho} \left(\lambda_2(t_0) + \frac{mu}{\rho} \right)$$

Es multiplica $\left(Q(t) - \frac{u}{\rho} \right)$ per $\left(\lambda_2 + \frac{mu}{\rho} \right)$ s'obté:

$$\left(Q(t) - \frac{u}{\rho} \right) \left(\lambda_2(t) + \frac{mu}{\rho} \right) = e^{-(t-t_0)\rho} e^{(t-t_0)\rho} \left(Q(t_0) - \frac{u}{\rho} \right) \left(\lambda_2(t_0) + \frac{mu}{\rho} \right)$$

$$\left(Q(t) - \frac{u}{\rho}\right) \left(\lambda_2(t) + \frac{mu}{\rho}\right) = \left(Q(t_0) - \frac{u}{\rho}\right) \left(\lambda_2(t_0) + \frac{mu}{\rho}\right)$$

La funció que en resulta d'aquesta combinació correspon a una hipèrbola amb dues asímtotes situades a $\frac{u}{\rho}$ i $-\frac{mu}{\rho}$, Q_a i $\lambda_{2,a}$. El terme que queda a la dreta de l'equació és un terme constant. L'equació, per tant, queda de la següent forma:

$$(Q(t) - Q_a)(\lambda_2(t) + \lambda_{2,a}) = ct$$

A continuació es mostra la gràfica que representa aquesta funció, així com l'evolució de la variable de control sobre ella.

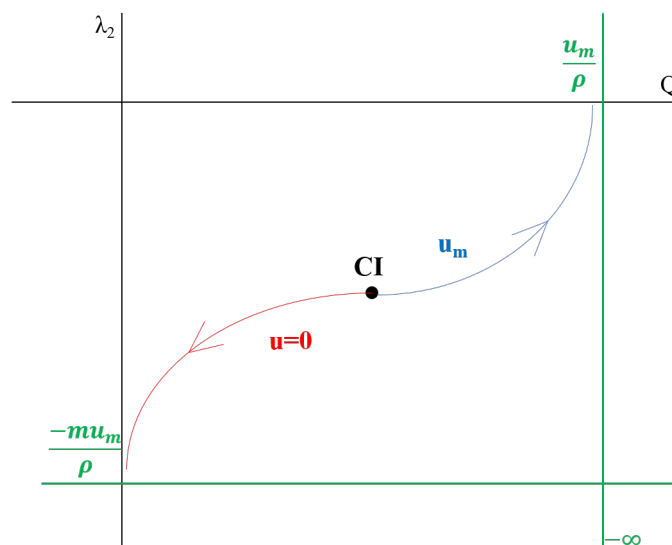


Figura 1: Representació gràfica de la funció asimptòtica de Q i λ_2

Aquestes asímtotes corresponen a les trajectòries $Q(t)$ i λ_2 quan t tendeix a l'infinit.

La situació inicial són les condicions inicials (CI) indicades. Com ja es coneix, la velocitat d'extracció només podrà prendre dos valors: $u = 0$ i $u = u_m$. Per tant, respecte les condicions inicials, sols té dos possibles camins d'evolució. Si extraïem, es fa tendir el temps cap a l'infinit i Q tendeix cap a Q_a i λ_2 cap a infinit. D'altra banda, prenent el camí de no extreure ($u = 0$) i considerant el temps infinit, Q tendirà cap al zero (asímtota pels períodes de no extracció) i λ_2 cap a l'infinit negatiu.

El camí immediat després de les condicions inicials ja s'ha explicat. El que passarà durant el transcurs de tot el procés d'extracció serà l'alternança de les dues corbes, en funció de si s'extreu o no (vegi's en el gràfic de sota).

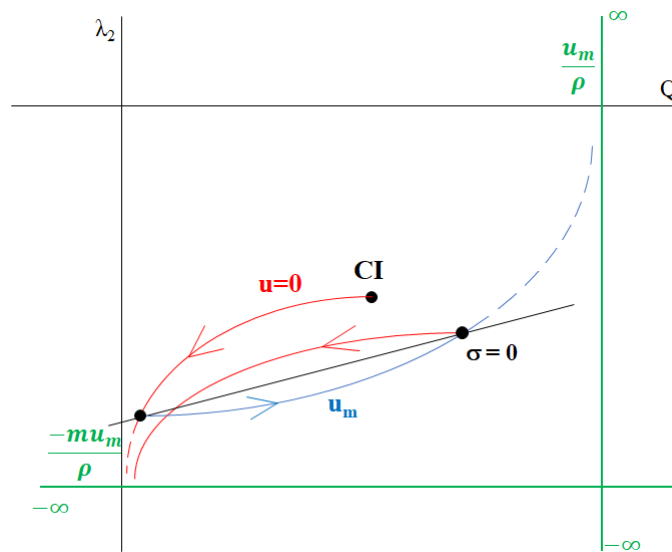


Figura 2: Representació gràfica de la funció asimptòtica de Q i λ_2 amb CI

Observació. L'explicació de la variable σ s'exposa més endavant en l'apartat 5.2.1.

Amb el fi d'estudiar el problema del projecte, s'analitzarà en dos escenaris diferents de temps: en un temps no fixat o lliure i en un temps fixat. El desenvolupament i conclusions es duen a terme en els apartats següents.

Comentari. Es manifesta que per a la resolució del problema òptim en temps continu s'han trobat certes dificultats que han fet portar a fer a l'anàlisi en temps discret per a poder fer conjectures coherents.

4.2.3 Resolució del problema en temps continu per un temps infinit

Les conclusions extretes de l'apartat anterior resumeixen que els valors admissibles i de control de la variable u (velocitat d'extracció) que fan possible l'optimització del benefici en el problema han de ser o bé 0 o bé u_m . La combinació i seqüència d'aquests dos possibles valors dependrà del cas en el que es plantegi el problema. En aquest apartat es suposa que l'horitzó temporal on es calcula el benefici és l'interval $[0, +\infty)$. Correspon a un cas més "ideal", ja que apart de no tenir en consideració d'efecte dels interessos del diner, el temps que dura el problema és infinit.

Per tant, tenint en compte temps infinits d'extracció, sense cap restricció del mercat més que la Q_{min} (quantitat mínima d'estoc en el mercat per a què generi interès de compra) i un temps mínim d'extracció (Δt), les conclusions finals obtingudes es representen tal que:

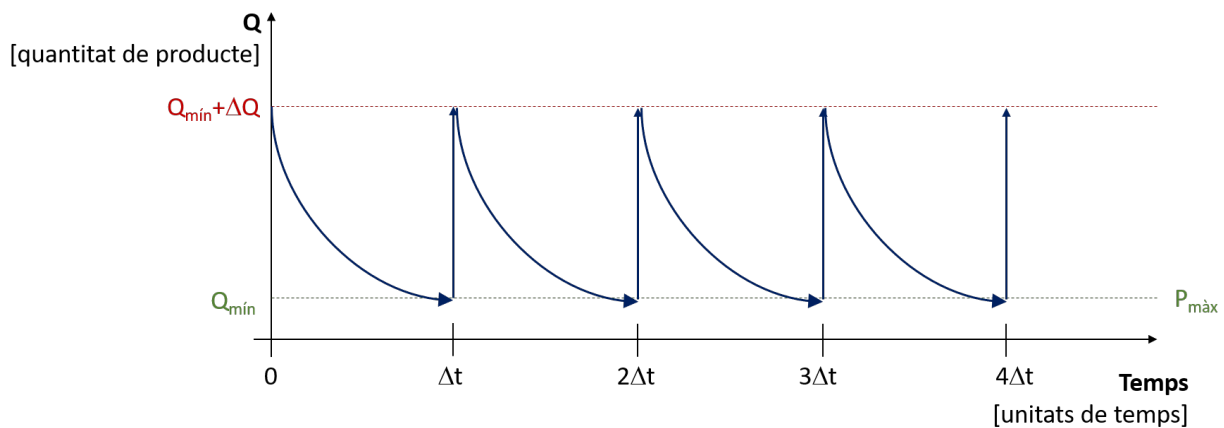


Figura 3: Representació gràfica de l'extracció òptima en temps continu per temps infinit

El model dibuixat sobre correspon a un model idealitzat. El procediment que suggereix és el següent: anar extraient durant infinitèsims períodes de temps des de Q_{\min} fins a un $Q_{\min} + \Delta Q$ fins a l'infinit. Aquest ΔQ ha de ser infinitament petit ja que, al mínim d'extreure producte, el preu disminueix tot d'una. Per tant, l'ideal en aquest cas seria extreure durant infinitèsims temps una quantitat ΔQ infinitèsima. Aquest és un exemple de problema que no té solució. Efectivament, si tinguéssim una solució del problema, aquesta solució comportaria extreure producte durant un cert interval $[t_1, t_1 + \varepsilon)$. Doncs bé, si extraïem durant l'interval $[t_1, t_1 + \frac{\varepsilon}{2})$, i deixem d'extreure durant un cert temps, el preu del producte pujarà degut a la peribilitat del producte, tindrem més producte per extreure i tot el temps necessari per a fer-ho, per tant el benefici serà superior. Doncs, aquell suposat òptim no ho era.

4.2.4 Resolució del problema en temps continu per un temps finit

En aquest segon escenari, com ja s'ha comentat amb anterioritat, la resolució no és ni tan senzilla ni tan directa com en l'escenari de temps infinit. Les conclusions extretes en aquest primer cas no són extrapolables al cas de tenir un temps determinat, ja que aquest factor temps influenciarà en el benefici final i les variables del problema. Per tant, es pensen maneres alternatives de resoldre el problema.

Es pot dir que, a la vista de les possibles accions de control, és raonable pensar que en alguns casos hi haurà intervals d'extracció i intervals de no extracció. Hom es pregunta si, com en el cas de temps continu, fins a quina mesura poden empetir-se els intervals d'extracció. En concret, s'ha plantejat la següent pregunta: és més profitós extreure sense parar durant un interval $[t_0, t_1]$ o bé comporta més benefici extreure durant l'interval $[t_0, t_b)$, deixar d'extreure durant l'interval $[t_b, t_b + a)$ i tornar a extreure durant l'interval $[t_b + a, t_1]$; En el benentès que $a < \frac{t_1 - t_0}{2}$. Aquests dos possibles escenaris es classifiquen en *Escenari 1* i *Escenari 2*.

Prèviament al desenvolupament de l'esmentada hipòtesi, és interessant analitzar què ocorre en els dos casos extrems: extreure tot el temps T a $u = 0$ i extreure tot el temps T a $u = u_m$.

- CAS $u = 0$ PER TOT T

La resposta davant aquest cas extrem és directa i és que en aquest cas no s'obté cap benefici. Per a obtenir una quantitat de benefici cal extreure producte i en aquest cas no s'extreu producte durant tot el temps T .

- CAS $u = u_m$ PER TOT T

En aquest segon cas està clar que sí que s'obtindrà benefici, ja que sí que s'extreu producte.

Poden esdevenir-se dues situacions diferents: que el producte s'exhaureixi abans d'acabar T o bé que el producte no s'exhaureixi quan s'ha arribat a T i que, per tant, romanguí producte dins la mina un cop s'ha finalitzat l'extracció.

En el primer cas, tot el producte s'ha extret i sobra temps fins a arribar a T . El benefici final obtingut hauria pogut ser més gran si s'hagués fet, almenys, una pausa en l'extracció i després s'hagués continuat extraient. Si fos així, el que hagués provocat és que el preu del producte, al haver-hi menys estoc després de l'aturada, fos més gran i, per tant, el benefici també més elevat. Es conclou que si el producte s'exhaureix abans de que s'acabi T , no s'ha assolit l'òptim.

En el segon cas, quan el producte no s'acaba per manca de temps, es pot establir que el benefici final és més petit que en el primer cas, ja que en el primer cas s'ha extret tot el producte i s'ha pogut obtenir més benefici.

Si extraguéssim sempre a velocitat u_m , l'estoc convergiria vers el punt d'equilibri $\frac{u_m}{\rho}$, arribant a un 98% del valor a $t_0 + \frac{4}{\rho}$, tal com es mostra a la gràfica on $\tau = 1/\rho$:

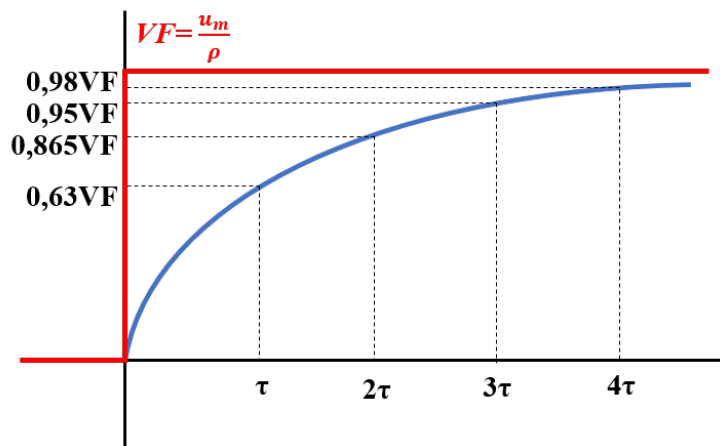


Figura 4: Solució d'un sistema de primer ordre

La solució representa una entrada esglaó de valor $Q_m = \frac{u_m}{\rho}$ i, al ser un sistema de primer ordre, l'estoc tendeix a aquest valor final seguint la forma que es mostra. La constant de temps τ fa referència al temps que tarda en arribar a Q_m . Si es fan aturades durant l'extracció, s'alenteix.

Es vol comparar ara el benefici que s'obté en aquest segon cas en relació en el que s'obté en les tres situacions següents:

i) **Quan també s'exhaureix el producte però es fan aturades en l'extracció:**

Com s'ha esmentat, si s'exhaureix el producte i es fan aturades en l'extracció, el benefici serà més gran que si no es fessin aquestes aturades. El que provoquen aquestes pauses és que el preu del producte augmenti per la disminució de l'estoc i derivi en un benefici més òptim. Aquesta situació correspon a una solució òptima del primer cas.

ii) Quan, podent exhaurir el producte, es fan aturades en l'extracció i no s'exhaureix el producte:

Aquí també s'obté més benefici que si no es fan aturades, pels motius ja explicats.

iii) Quan, sense poder exhaurir el producte, es fan aturades en l'extracció:

Aquesta situació representa una solució òptima del segon cas plantejat. El producte no s'exhaureix però es fan aturades durant l'extracció que provoquen una pujada de preu i un major benefici.

La comparació d'aquests 3 casos amb el cas de no fer cap aturada en el procés d'extracció demostra, en la teoria, que fer una pausa durant l'extracció comporta un major benefici. En el següent apartat es desenvolupa aquesta hipòtesi.

4.3 Hipòtesi del problema òptim en temps continu per temps finit

Una de les qüestions que s'ha plantejat en aquest projecte és la temporalitat d'extracció del recurs. És a dir, volem determinar si el benefici serà l'òptim extraient el recurs durant un temps ininterromput o, si pel contrari, fent una pausa al mig del període ens farà obtenir més benefici.

Aleshores, ens dibuixem dos escenaris:

- Escenari 1. Extracció del recurs durant un temps T ininterromput.



Figura 5: Temps continu. Escenari 1: Extracció del recurs durant un temps T ininterromput

- Escenari 2. Extracció del recurs durant un temps $(\frac{T-a}{2})$, pausa de temps a i extracció un altre cop durant un temps de $(\frac{T-a}{2})$.

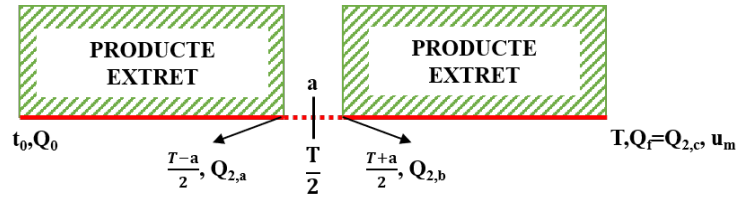


Figura 6: Temps continu. Escenari 2: Extracció del recurs durant un temps $(\frac{T-a}{2})$, pausa de temps a i extracció un altre cop durant un temps de $(\frac{T-a}{2})$

Naturalment, el valor del temps a ha de ser suficientment petit.

PARÀMETRES

- x_0 : quantitat de recurs dins la mina durant en el primer instant de l'extracció ; $x_0 > 0$
- u_m : valor de la velocitat d'extracció.
- ρ : peribilitat del producte.
- Q_{min} : quantitat de producte en estoc tal que el preu sigui màxim. Es fixa un valor de Q_{min} igual a zero per a simplificar els càlculs.
- Q_0 : quantitat de producte en estoc a l'instant inicial. Sempre ha de romandre entre els valors de 0 i $\frac{u_m}{\rho}$. Aquest darrer nombre fa referència a l'estoc màxim que pot abraçar el sistema (Q_m).
- p_m : preu màxim del producte. aquest preu s'assoleix quan $Q = Q_0 = Q_{min} = 0$

EQUACIONS

- Equació de la variable $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{u}{\rho} (1 - e^{-\rho t}) + e^{-\rho t} Q_0 \quad (46)$$

- Equació de la variable $p(Q)$:

$$p(Q) = p_m - m \cdot (Q) \quad (47)$$

- Equació de la variable del benefici:

$$B = \int_{t_0}^{t_f} u \cdot p(Q) d\tau$$

$$B = \frac{u_m(m\rho^2 t + e^{-\rho t} m Q_0 \rho - m \rho t u_m + p_m t \rho^2 - e^{-\rho t} m \rho u_m - m Q_0 \rho + m u_m)}{\rho^2}$$

Un cop s'han definit totes les variables i equacions necessàries, es segueix a procedir amb la resolució del problema. El que es farà serà el següent: es calcularà el primer lloc el benefici obtingut en el cas 1, llavors calcularem el benefici del cas 2 (suma dels beneficis obtinguts d'extreure en els dos trams en el que s'extreu el recurs), i finalment es compararan els dos resultats i s'obtindrà la solució final de la discussió. Per a comparar els dos beneficis obtinguts, com que tots els càlculs es fan en genèric, el que es farà és realitzar la resta del benefici del cas 1 menys el benefici total del cas 2 i, en funció dels resultats obtinguts, es podrà determinar una conclusió final sobre la discussió.

RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA

Benefici de l'escenari 1

El primer que es necessita conèixer és quin serà l'estoc que romandrà en el mercat al final del període T .

$$Q_1(T) = \frac{u}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + e^{-\rho T} Q_0 \quad (48)$$

Aleshores, només cal aplicar la fórmula del benefici a aquest estoc (Q_1) i trobar el benefici de l'escenari 1.

$$B_1 = \frac{u_m(m\rho^2 T + e^{-\rho T} mQ_0\rho - m\rho T u_m + p_m T \rho^2 - e^{-\rho T} m\rho u_m - mQ_0\rho + m u_m)}{\rho^2} \quad (49)$$

Benefici de l'escenari 2

En aquest escenari, com ja s'ha avançat anteriorment, es divideix el total del període T en tres trams:

1. Un primer tram amb el temps igual a $\frac{(T-a)}{2}$ i quantitat d'estoc acumulat de $Q_{2,a}$.
2. Un tram al mig amb el valor de $t = a$, amb estoc inicial de $Q_{2,a}$ i estoc final de $Q_{2,b}$.
3. Un tram al final amb el temps igual a $\frac{(T-a)}{2}$, amb estoc inicial de $Q_{2,b}$ i estoc final de $Q_{2,c}$.

És molt important definir quin estoc és l'inicial i final de cada període de temps per al posterior càlcul del benefici: $Q_{2,a}$ equival a l'estoc al final del primer tram, $Q_{2,b}$ equival a l'estoc al final del segon tram i $Q_{2,c}$ equival a l'estoc del tercer tram.

Es comencen els càlculs amb el primer tram, on s'obtenen l'estoc del primer segment i el benefici que se n'extreu:

$$Q_{2,a} \left(\frac{T-a}{2} \right) = \frac{u}{\rho} (1 - e^{-\rho(\frac{T-a}{2})}) + e^{-\rho(\frac{T-a}{2})} Q_0 \quad (50)$$

$$B_{2,a} = \frac{u_m(m\rho^2 \left(\frac{T-a}{2}\right) + e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}mQ_0\rho - m\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)u_m + p_m\left(\frac{T-a}{2}\right)\rho^2 - e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}m\rho u_m - mQ_0\rho + mu_m)}{\rho^2} \quad (51)$$

Es segueix amb els mateixos càlculs aplicats al segon tram, tenint en compte sempre els estocs i temps finals i inicials, excepte que en aquest tram no es calcula el benefici obtingut ja que no hi ha acció d'extracció i no se n'extreu cap benefici.

$$Q_{2,b}(a) = \frac{u}{\rho} \left(1 - e^{-\rho a}\right) + e^{-\rho a}Q_0 \quad (52)$$

Per acabar, es determina l'estoc final i el benefici del segon tram. S'ha d'anar amb compte amb els estoc inicials a cada càlcul.

$$Q_{2,c}\left(\frac{T-a}{2}\right) = \frac{u}{\rho} \left(1 - e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}\right) + e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}Q_{2,b} \quad (53)$$

Comparem el valor final de l'estoc en els dos casos: un interval d'extracció continuada $[0, T]$ i el mateix interval dividit en tres parts i sense extreure a la part del mig, $\left[\frac{T-a}{2}, \frac{T+a}{2}\right]$, on naturalment $a < T$.

$$Q_1 - Q_{2,c} = \left(-\frac{u_m e^{-\frac{\rho a}{2}}}{\rho} + \frac{u_m e^{\frac{\rho a}{2}}}{\rho} e^{-\frac{\rho T}{2}} \right) \quad (54)$$

El resultat de $Q_1 - Q_{2,c}$, efectivament, és positiu.

Es pot seguir amb els càlculs i s'obté a continuació el benefici del segon tram.

$$B_{2,c} = \frac{u_m(m\rho^2 \left(\frac{T-a}{2}\right) + e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}mQ_{2,b}\rho - m\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)u_m + p_m\left(\frac{T-a}{2}\right)\rho^2 - e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)}m\rho u_m - mQ_{2,b}\rho + mu_m)}{\rho^2} \quad (55)$$

El benefici final total de tot el procés correspon a la suma dels dos beneficis obtinguts al dos trams on hi ha hagut extracció del producte.

$$B_{2,T} = B_{2,a} + B_{2,c} = \quad (56)$$

$$\frac{1}{\rho u_m} \left(p_m u_m \left((Q_0 \rho - 2u_m) e^{-\rho\left(\frac{T-a}{2}\right)} + (-Q_0 \rho + 2u_m) e^{-\rho\left(\frac{T+a}{2}\right)} (Q_0 \rho - u_m) e^{-\rho T} - e^{-\rho a} u_m + (T-a)\rho^2 - Q_0 \rho + 2u_m \right) \right) \quad (57)$$

Comparació del beneficis

Per a prendre una decisió final sobre quin dels dos casos ens aporta el màxim benefici d'extracció, es comparen els dos beneficis a través de la resta del primer benefici menys els segon. Així, si el resultat és un valor positiu el millor escenari d'extracció és el primer i si pel contrari és un valor negatiu, el segon cas serà el més òptim.

$$B_{comp} = B_1 - B_{2,T} = \frac{u_m m (Q_0 \rho - u_m) e^{-\rho T}}{\rho^2} - \frac{2u_m m (Q_0 \rho - u_m) e^{-\frac{\rho(T-a)}{2}}}{\rho^2} - \frac{u_m ((u_m a - Q_0) \rho + u_m) m - p_m \rho^2 a}{\rho^2} \quad (58)$$

S'observa que les tres fraccions estan multiplicades pel factor $\frac{mu_m}{\rho^2}$. Aquest factor és positiu i, per tant, per a simplificar els càlculs, es multiplica tot el benefici per $\frac{\rho^2}{mu_m}$ tal que:

$$\begin{aligned} B_{comp,aux} &= -2m(Q_0 \rho - u_m) e^{-\frac{\rho(T-a)}{2}} + m(Q_0 \rho - u_m) e^{-\rho T} + ((-u_m a + Q_0) \rho - u_m) m + p_m \rho^2 a = \\ &= (-m \rho u_m + p_m \rho^2) a - 2m(Q_0 \rho - u_m) e^{-\frac{\rho(T-a)}{2}} + m(Q_0 \rho - u_m) e^{-\rho T} + m(Q_0 \rho - u_m) \end{aligned} \quad (59)$$

Aquesta és una equació transcendent en a i, per tant, només es podrà resoldre per a numèrica-ment.

Tanmateix, si $(-m \rho u_m + p_m \rho^2) = 0$, aleshores ja no es tracta d'una equació transcendent en a i es pot resoldre. Però, si hom es fixa en aquest terme que acompanya a a :

$$-m \rho u_m + p_m \rho^2 = 0; \quad m \rho u_m = p_m \rho^2; \quad m u_m = p_m \rho; \quad m = \frac{p_m \rho}{u_m}$$

Observi's que $m = \left(\frac{p_m \rho}{u_m}\right)$, amb signe negatiu, és el pendent que hauria de tenir la funció preu per tal que el preu fos zero quan Q convergeix asimptòticament vers el seu valor màxim possible $Q_m = \frac{u_m}{\rho}$.

Per simplificar els càlculs i havent vist que aquesta hipòtesi és raonable, d'ara en endavant suposarem $m = \frac{p_m \rho}{u_m}$.

$$B_{comp,aux} = \frac{p_m \rho (e^{-\rho T} - 2e^{-\frac{\rho(T-a)}{2}} + 1)(Q_0 \rho - u_m)}{u_m} \quad (60)$$

$B_{comp,aux}$ és un producte de 4 factors. $(p_m \rho)$ i $(u_m) > 0$. $(Q_0 \rho - u_m) < 0$ perquè $\frac{u_m}{\rho}$ és el valor màxim que pot prendre $Q(t)$ en el problema. Aquest valor s'hi arriba asimptòticament si $u = u_m$ per tot $t > 0$. Finalment, el terme:

$$\left(e^{-\rho T} - 2e^{\frac{-\rho(T-a)}{2}} + 1\right) = e^{\frac{-\rho T}{2}} \left(e^{\frac{-\rho T}{2}} - 2e^{\frac{\rho a}{2}} + 1\right) > 0 \text{ si, i només si, } e^{\frac{-\rho T}{2}} \left(e^{\frac{-\rho T}{2}} - 2e^{\frac{\rho a}{2}}\right) > -1$$

$$\text{que equival a } \left(e^{\frac{-\rho T}{2}} - 2e^{\frac{\rho a}{2}} + 1\right) > e^{\frac{\rho T}{2}}; -2e^{\frac{\rho a}{2}} > e^{\frac{\rho T}{2}} - e^{\frac{-\rho T}{2}}; e^{\frac{\rho a}{2}} < \frac{\left(e^{\frac{\rho T}{2}} - e^{\frac{-\rho T}{2}}\right)}{2}$$

$$a < \frac{2}{\rho} \cdot \ln \left(\frac{\left(e^{\frac{\rho T}{2}} - e^{\frac{-\rho T}{2}}\right)}{2} \right) = \frac{2}{\rho} \cdot \ln \left(\sinh \left(e^{\frac{\rho T}{2}} \right) \right)$$

En resum, $B_{comp,aux} < 0$ si, i només si, $a < \frac{2}{\rho} \cdot \ln \left(\sinh \left(e^{\frac{\rho T}{2}} \right) \right)$.

La solució final que ofereix aquesta hipòtesi és la determinació d'un interval màxim d'extracció per a obtenir el benefici òptim. Qualsevol altre interval d'extracció amb un temps més elevat que aquest temps mínim, mai serà la solució òptima ja que sempre hi haurà un període d'extracció més petit que provocarà un major benefici.

Es pot concloure que, si es compleix la condició determinada per a a trobada, existeix un interval de longitud $\frac{2}{\rho} \ln(\sinh(e^{\frac{\rho T}{2}}))$ tal que és més òptim extreure durant aquest període, parar un temps a i tornar a extreure durant el mateix interval que extreure tot T seguit.

4.4 Conclusions en temps continu

En aquest gran bloc de l'estudi del problema òptim en temps continu s'han pogut extreure les conclusions que segueixen.

Després de desenvolupar-se les variables i coneixent les dinàmiques dels estats, s'ha aplicat el Principi del Màxim de Pontryagin i s'han trobat les dinàmiques dels co-estats. Amb això, s'ha resolt el problema i s'ha determinat que, per la naturalesa pròpia del problema, la variable de control u només podrà prendre dos valors (0 i u_m) per tal d'assolir el benefici màxim. S'ha estudiat més endavant el comportament de les variables d'estat en aquests dos possibles casos de u .

Seguidament, s'han plantejat dos escenaris diferents per a estudiar el problema en temps continu: temps infinit i temps finit. Per al temps infinit, s'ha determinat que no es podrà assolir mai l'òptim degut a què sempre hi haurà algun període infinitèsim més petit que l'anterior que assolirà un major benefici. Aquest fet ha fet pensar en la possibilitat de què en certs casos, és més òptima l'existència d'intervals d'extracció i no extracció alternats que únicament extreure i prou. Per això, en el cas de temps finit, s'ha elaborat una hipòtesi enfrontant dos escenaris: extreure ininterrompudament durant un temps T o bé extreure durant un temps $\frac{T-a}{2}$, parar un temps a i tornar a extreure un temps $\frac{T-a}{2}$, sent a un temps infinitament més petit que T . La conclusió final d'aquesta hipòtesi ha estat la determinació d'un període mínim d'extracció per a què l'escenari on es para d'extreure sigui més beneficiós.

En resum, el que s'ha obtingut en aquesta secció ha estat determinar que per temps infinit no es pot aconseguir mai l'òptim i, per temps finit, cal extreure a intervals de longitud la conclusió és que cal extreure a intervals de longitud $\frac{2}{\rho} \ln(\sinh(e^{\frac{\rho t}{2}}))$ sempre i quan quedi temps després d'un interval de longitud més gran. Amb això es vol dir que pot ser una solució òptima: no extreure fins a un determinat moment i a partir d'aquest extreure sense parar fins a arribar a l'horitzó temporal especificat.

5 El problema en temps discret

5.1 Introducció

En apartats anteriors s'ha resolt el problema de control òptim en temps continu per al cas de temps infinit d'extracció i s'ha determinat que no existeix una solució òptima.

No obstant, per al segon cas, el cas en temps continu per temps fixat d'extracció, tot i que s'hagin extret unes relacions entre variables, no s'ha pogut determinar cap regla general ni s'ha establert cap decisió per a concloure la problemàtica. Per aquest motiu, es trasllada el problema en temps continu a temps discret, ja que en temps discret també es disposa d'un PMP i es coneixen unes eines de simulació precises. A través del PMP, de les fórmules en temps discret i de l'ús d'eines de simulació en temps discret, es pretén solucionar la problemàtica iniciada.

5.2 Desenvolupament del problema en temps discret

5.2.1 Aplicació de les fórmules en temps discret

Tant el problema de control òptim com el Principi del Màxim de Pontryagin s'han descrit per temps discret en els apartats 4.5 i 4.5.1, respectivament. El següent pas correspon a escriure totes les equacions que es disposaven en temps continu en temps discret.

Primerament, es discretitza el model amb un mantenidor d'ordre zero, la qual cosa és perfectament coherent amb el problema de temps continu doncs el control en temps continu és localment constant. Tenint en consideració un període de mostreig T , s'obté una u constant en cadascun dels intervals $[nT, (n+1)T]$ i es substitueix aquesta u en les equacions de temps continu s'obté:

$$x(n+1) = x(n) - Tu(n) \quad (61)$$

$$Q(n+1) = \frac{u(n)}{\rho}(1 - e^{-\rho T}) + Q(n)e^{-\rho T} \quad (62)$$

que són les equacions de temps continu discretitzades mitjançant un mantenidor d'ordre zero.

Després de discretitzar les equacions que regeixen la dinàmica del sistema de control, cal passar a temps discret la funció que es vol optimitzar. Resulta:

$$B = \sum_{n=0}^{n=N} (p_m - mQ(n))u(n)T \quad (63)$$

Atès que s'ha presentat el PMP en temps discret, el Hamiltonià és:

$$H(n) = p(n)u(n)T + \lambda_{1,n+1}x(n+1) + \lambda_{2,n+1}Q(n+1)$$

$$H(n) = (p_m - mQ(n))u(n)T + \lambda_{1,n+1}(x(n) - Tu(n)) + \lambda_{2,n+1} \left(\frac{u(n)}{\rho}(1 - e^{-\rho T}) + Q(n)e^{-\rho T} \right) \quad (64)$$

I, com es pot observar, és lineal en u . Si definim:

$$\sigma(n) = p(n) - T\lambda_{1,n+1} + \lambda_{2,n+1} \left(\frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right) \quad (65)$$

La funció Hamiltoniana es pot escriure com:

$$H = \sigma(t)u(t) + (\lambda_{1,n+1}x(n) + \lambda_{2,n+1}Q(n)e^{-\rho T}) = \sigma(t)u(t) + ct \quad (66)$$

pensada com una funció que només depèn de u , és una recta. El màxim a l'interval $[0, u_m]$ serà 0 o u_m depenent de si el pendent de la recta és positiu o negatiu. σ representa el pendent d'aquesta recta. En resum, si el pendent de la recta és positiu ($\sigma > 0$), significarà que el màxim d'aquell interval és u_m . En canvi, si el pendent de la recta és negatiu ($\sigma < 0$), voldrà dir que el màxim de la recta és 0.

Seguidament, es descriu la dinàmica de les λ 's, la qual es determina tal que:

$$\lambda_{1,n} = \frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_{1,n+1} \quad (67)$$

$$\lambda_{2,n} = \frac{\partial H}{\partial Q} = mu(n)T + \lambda_{2,n+1}e^{-\rho T} \quad (68)$$

Per als multiplicadors de Lagrange calculats, cal destacar dos aspectes importants de cara a les simulacions posteriorment executades.

Respecte al primer multiplicador de Lagrange, λ_1 , no es faran els càlculs pertinents durant les simulacions. Aquesta decisió és deguda a què el seu valor no variarà al llarg de tot el procediment d'extracció, atès que no es fixa el valor final de la x . Doncs, $\lambda_{1,t_f} = 0$.

Atès que tampoc s'imposa cap valor final per la Q , $\lambda_{2,t_f} = 0$.

5.3 Resolució del problema en temps discret

El primer pas, i més important de tots, a l'hora d'executar les simulacions és trobar la seqüència de les velocitats d'extracció. Només una determinada combinació de velocitats d'extracció (o

això és el que es creu) proporcionarà el màxim benefici de l'extracció. Els altres paràmetres (preu, estoc, quantitat de producte, λ i σ 's) vendran determinats per la seqüència òptima de les u 's.

5.3.1 Eina Microsoft Excel Solver

L'eina que s'ha fet servir per a tal de trobar aquest ordenament determinat de les u 's és el *Microsoft Excel Solver*. *Microsoft Excel Solver* utilitza el mètode GRG (Generalized Reduced Gradient), un algorisme per optimitzar problemes no lineals. Aquest algorisme va ser desenvolupat per Leon Lasdon, de la Universitat de Texas, i per Allan Waren, de la Universitat Estatal de Cleveland. El codi GRG s'ha utilitzat durant molts anys com un dels enfocaments més robustos i fiables per resoldre problemes NLP (Natural Language Processing) difícils.

Microsoft Excel Solver és una eina d'anàlisi com a complement de *Microsoft Excel* usada principalment per a trobar el valor òptim, tant sigui mínim com màxim, per a una fórmula d'una cel·la, anomenada cel·la objectiu. El valor d'aquesta cel·la depèn del valor d'altres cel·les (cel·les variants), a través de la seva fórmula. El que permet l'eina *Solver* és, mitjançant ajustos en els valors de les cel·les variants, aconseguir el valor òptim de la cel·la objectiu. La resta de cel·les que no siguin cel·les variants no influencien en l'optimització de la cel·la objectiu i el seu valor es pot veure canviat o no per la variació de les cel·les variants. Per a tal d'ajustar els valors de les cel·les variants, es fixen unes limitacions o restriccions per als valors d'aquestes (acotacions, límits...) amb l'objectiu d'apropar el resultat a la realitat i al problema en qüestió.

Comptat i debatut, es pot emprar l'eina *Microsoft Excel Solver* per a determinar el valor màxim o mínim d'una cel·la canviant el valor d'altres.

En el cas del problema en qüestió del projecte, com ja s'ha explicat més àmpliament a l'apartat 2.1. *Objectiu del projecte*, l'objectiu principal del problema és optimitzar l'extracció d'un recurs. Aleshores, es sabrà que s'ha trobat el cas òptim quan els beneficis d'aquest en siguin màxims. Per tant, el que es vol maximitzar és el valor del benefici total d'extracció. D'altra banda, l'única variable que pot controlar el seu valor és la velocitat d'extracció. Més concretament, la seqüència amb la que s'executa. És a dir, el que es vol és ajustar és la combinació de les u 's ($u = 0$ i $u = u_m$) de tal manera que s'assoleixi l'òptim. En l'execució del programa es fixaran com a condicions $u \geq 0$ i $u \leq u_m$. Els valors possibles de u haurien d'oscil·lar entre aquests dos valors, però per la naturalesa del problema, els únics resultats que en sortiran seran $u = 0$ i $u = u_m$.

A les simulacions es consideren els següents valors dels paràmetres:

Taula 1: Valors paràmetres constants

PARÀMETRE	x_0	p_m	u_m
VALOR	100	10	5

Fixats els paràmetres, es disposa a calcular les variables que fluctuen en la simulació. En quant al preu, cal esmentar que s'ha definit de tal manera que el preu màxim s'assoleix només quan $Q = Q_{min}$, que suposarem 0, i també que el preu mínim ($p = 0$), s'assoleix quan $Q = Q_m$. Per tant, si $Q \geq Q_m$, el preu serà negatiu, i això no pot ocórrer. Només té sentit prendre $Q \leq Q_m$. Aquesta Q_m és el valor màxim que pot assolir Q si s'extreu sempre de forma continuada. És per

això que el prenem com a Q màxima, no és un tema de model. Per aquest motiu, es defineixen els següents valors:

$$m = \frac{p_m \rho}{u_m} \quad ; \quad Q_m = \frac{u_m}{\rho}$$

En tots els casos que es vulgui trobar la forma de la velocitat d'extracció, el que es fa és: primer, calcular el preu durant tots els períodes ($p(n=0)$ fins $p(n=N)$); després, calcular la quantitat de producte en estoc durant tots els períodes ($Q(n=0)$ fins $Q(n=N)$), tot tenint en compte una seqüència aleatòria per les velocitats d'extracció; finalment es calcula el benefici total del procés d'extracció. Com el que es vol es tenir el benefici màxim de la extracció en funció de la velocitat d'extracció, s'emptra l'eina *Solver* per aconseguir-ho: es fixa la cel·la del benefici total com a cel·la òptima del problema, s'agafen les cel·les de les velocitats d'extracció com a cel·les variants i per acabar s'estableixen les condicions de funcionament d'aquestes, que són:

$$u \geq 0 \quad ; \quad u \leq 5 \quad (69)$$

Amb això s'aconsegueix que les u 's només puguin aquests dos valors.

5.3.2 Simulacions en temps discret

Per tal d'obtenir dades que ens permetin conjeturar quelcom en el cas de temps continu, es completen les dades obtingudes amb l'evolució de x i de λ_2 . S'observa que aquesta darrera s'obté en sentit descendent: això és des del seu valor final fins al principi. També es mostren els successius valors de σ per a observar la llei de control abans esmentada

A primera vista, hom s'ha de fixar en el següents punts a verificar que no s'ha comès cap error en els càlculs:

- Que el preu no sobrepassi el valor màxim ni sigui negatiu ($p(n) \leq p_m$ i $p(n) \geq 0$).
- Que la quantitat de producte en estoc Q no sobrepassi el valor màxim ni sigui negativa ($Q(n) \leq Q_m$ i $Q(n) \geq 0$).
- Que la quantitat de producte que roman dins la mina x no sigui negatiu ($x \geq 0$).
- Que els signes de σ es corresponguin amb els valors de les u 's:

$$\begin{aligned} \sigma \leq 0 & \iff u = 0 \\ \sigma \geq 0 & \iff u = 5 \end{aligned}$$

Un cop es té el coneixement del funcionament del càlcul de les simulacions, el procediment és bastant mecànic. Es fitxen els paràmetres constants a cada simulació, es van canviant els

paràmetres variables i es classifiquen els casos segons els seus períodes de mostratge i segons la grandària de la mostra.

A continuació es disposa d'una taula general de tots els casos i les seves variables implicades en cada cas.

Taula 2: Recopilació de tots els casos de simulació

	T	N	ρ	Q_m	m
CAS 1	1	5	0,1	50	0,2
CAS 2	1	5	0,5	10	1
CAS 3	1	5	5	1	10
CAS 4	1	5	10	0,5	20
CAS 5	1	30	0,1	50	0,2
CAS 6	1	30	0,5	10	1
CAS 7	1	30	5	1	10
CAS 8	1	30	10	0,5	20
CAS 9	0,5	11	0,1	50	0,2
CAS 10	0,5	11	0,5	10	1
CAS 11	0,5	11	5	1	10
CAS 12	0,5	11	10	0,5	20
CAS 13	0,5	61	0,1	50	0,2
CAS 14	0,5	61	0,5	10	1
CAS 15	0,5	61	5	1	10
CAS 16	0,5	61	10	0,5	20
CAS 17	0,25	23	0,1	50	0,2
CAS 18	0,25	23	0,5	10	1
CAS 19	0,25	23	5	1	10
CAS 20	0,25	23	10	0,5	20
CAS 21	0,25	123	0,1	50	0,2
CAS 22	0,25	123	0,5	10	1
CAS 23	0,25	123	5	1	10
CAS 23	0,25	123	10	0,5	20

En aquesta taula es representa de manera general totes les simulacions executades en el primer gran bloc de simulacions. Com es pot veure, el període podrà prendre tres valors: la unitat, la meitat de la unitat i un quart de la unitat. Es redueix el període de mostratge ja que es vol representar la influència que esdevé quan es produeix aquest reducció, que és ni més ni menys un acostament a la realitat. Com més petit sigui el període de mostratge, més s'assemblarà al que ocorre en temps continu i els resultats podran traslladar-se més verídicaament. A més a més, es podrà veure com per períodes més grans, els resultats dibuixen un petit avançament del que més endavant esdevindrà amb períodes més petits. Aquesta breu explicació de la importància de la mida del període es pot observar amb més claredat a l'apèndix 2. *Simulacions i representacions gràfiques de les simulacions.*

La següent variable, N , que fa referència al nombre d'iteracions de la simulació, és a dir, és el nombre de períodes (l'horitzó temporal del problema sobre el que volem optimitzar el benefici). N pren inicialment dos valors: 5 i 30. S'han escollit aquests dos valors per a tenir una comparació sòlida del que implica tenir una mostra petita ($N=5$) en contra del que significa tenir-ne una de

més gran ($N=30$). Quan es fa el canvi del període i es redueix, aquesta mida de la mostra ha de canviar obligatòriament per a equiparar els resultats i que tot el període inicial estigui cobert per les mostres. Per tant, al tenir un període de mostratge més petit, implica que s'executen més mostres per període per a cobrir tot el temps inicialment determinat. La fórmula que relaciona la mida de les mostres entre períodes és la següent:

$$N' = 2N + 1 \quad (70)$$

Si els canvis que es faran seran de T a $\frac{T}{2}$ i $\frac{T}{4}$, les N 's en aquests dos casos són:

- Per $N=5$:
 - $T=1$; $N=5$
 - $T'=0,5$; $N'=11$
 - $T''=0,25$; $N''=23$
- Per $N=30$:
 - $T=1$; $N=30$
 - $T'=0,5$; $N'=61$
 - $T''=0,25$; $N''=123$

Taula 3: *Valors de T i N*

	T=1	T=0,5	T=0,25
N=5	5	11	23
N=30	30	61	123

Per les tres variables que segueixen i que modificaran el seu valor en cada grup de simulacions, la tria del seu valors s'ha formulat amb el criteri de tenir valors molt petits, valors normals i valors molt grans.

Per la variable de la peribilitat ρ s'han escollit 4 valors que són 0.1, 0.5, 5 i 10. Valors petits faran referència a productes poc peribles i valors gran, a molt peribles.

Amb l'objectiu de tenir una visió més compacta de la diferenciació dels casos entre ells, els anàlisis que s'han executat es poden subdividir en 4 condicions generals.

Taula 4: *Condicions de les simulacions*

	ρ	Q_m	Q_0	m
CONDICIONS 1	0,1	50	50	0,2
CONDICIONS 2	0,5	10	10	1
CONDICIONS 3	5	1	1	10
CONDICIONS 4	10	0,5	0,5	20

Taula 5: Classificació de les simulacions segons les condicions

		T	$T/2$	$T/4$
CONDICIONS 1	N=5	Cas 1	Cas 9	Cas 17
	N=30	Cas 5	Cas 13	Cas 21
CONDICIONS 2	N=5	Cas 2	Cas 10	Cas 18
	N=30	Cas 6	Cas 14	Cas 22
CONDICIONS 3	N=5	Cas 3	Cas 11	Cas 19
	N=30	Cas 7	Cas 15	Cas 23
CONDICIONS 4	N=5	Cas 4	Cas 12	Cas 20
	N=30	Cas 8	Cas 16	Cas 24

Les taules dibuixades a sobre serviran per agilitzar el procés de cerca dels casos per a determinades condicions, períodes de mostreig i grandària de mostres.

5.3.3 Conclusions a les simulacions

En aquest projecte, com bé s'ha explicat amb anterioritat, s'han executat un seguit de simulacions, dividides en 2 blocs de simulacions: un gran bloc de simulacions amb 24 escenaris i un altre més reduït amb 5 simulacions. Una recollida de tota la representació gràfica d'aquestes simulacions es mostra en l'apèndix 2. *Simulacions i representació gràfica de les simulacions*.

El primer bloc és el més extens de tots i és el que ens permetrà realitzar les conclusions en temps discret finals. El bloc petit solament ens servirà de suport del primer. L'objectiu principal de les simulacions es basa en estudiar 4 escenaris diferents on es representen 4 condicions específiques per als paràmetres variables, que en el projecte són la ρ (constant de peribilitat o caducitat), la Q_m (estoc màxim que pot suportar el mercat), la Q_0 (estoc inicial del producte en el mercat) i el coeficient m (coeficient de pèrdua o d'increment de preu). En aquest conjunt de simulacions, el que es vol analitzar dels 4 casos diferents són les seves diferències, les seves similituds, les relacions de les variables entre sí, així com determinar quin cas és el que comporta més benefici final.

A continuació, es comença amb l'anàlisi dels paràmetres variables implicats en les simulacions, tot basant-se en el primer gran bloc de simulacions (24 casos), ja que es disposa una informació més concreta i acurada d'aquestes.

- **Anàlisi del preu**

El preu és un dels paràmetres més determinants del problema d'aquest projecte. Primerament, es presenta l'equació que controla el preu del producte:

EQUACIÓ DEL PREU

$$p(n) = p_m - mQ(n) \quad (71)$$

Els paràmetres implicats en el valor final del preu són el preu màxim del producte i el coeficient de pèrdua o increment del preu (m) i la variable de quantitat de producte en

estoc en el mercat (Q).

Es disposa a sota d'uns gràfics per a estudiar la relació del preu amb la quantitat d'estoc Q .

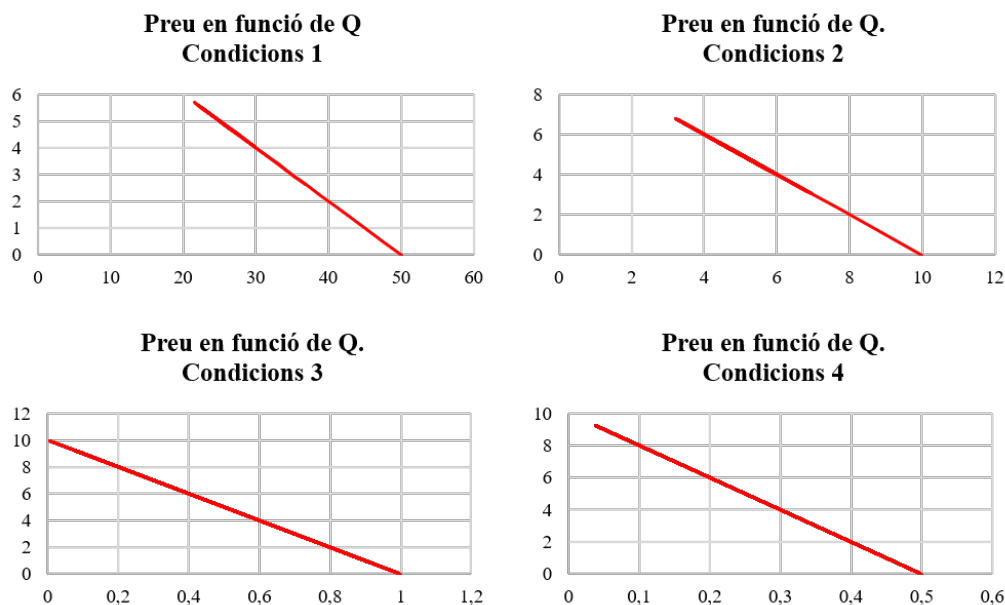
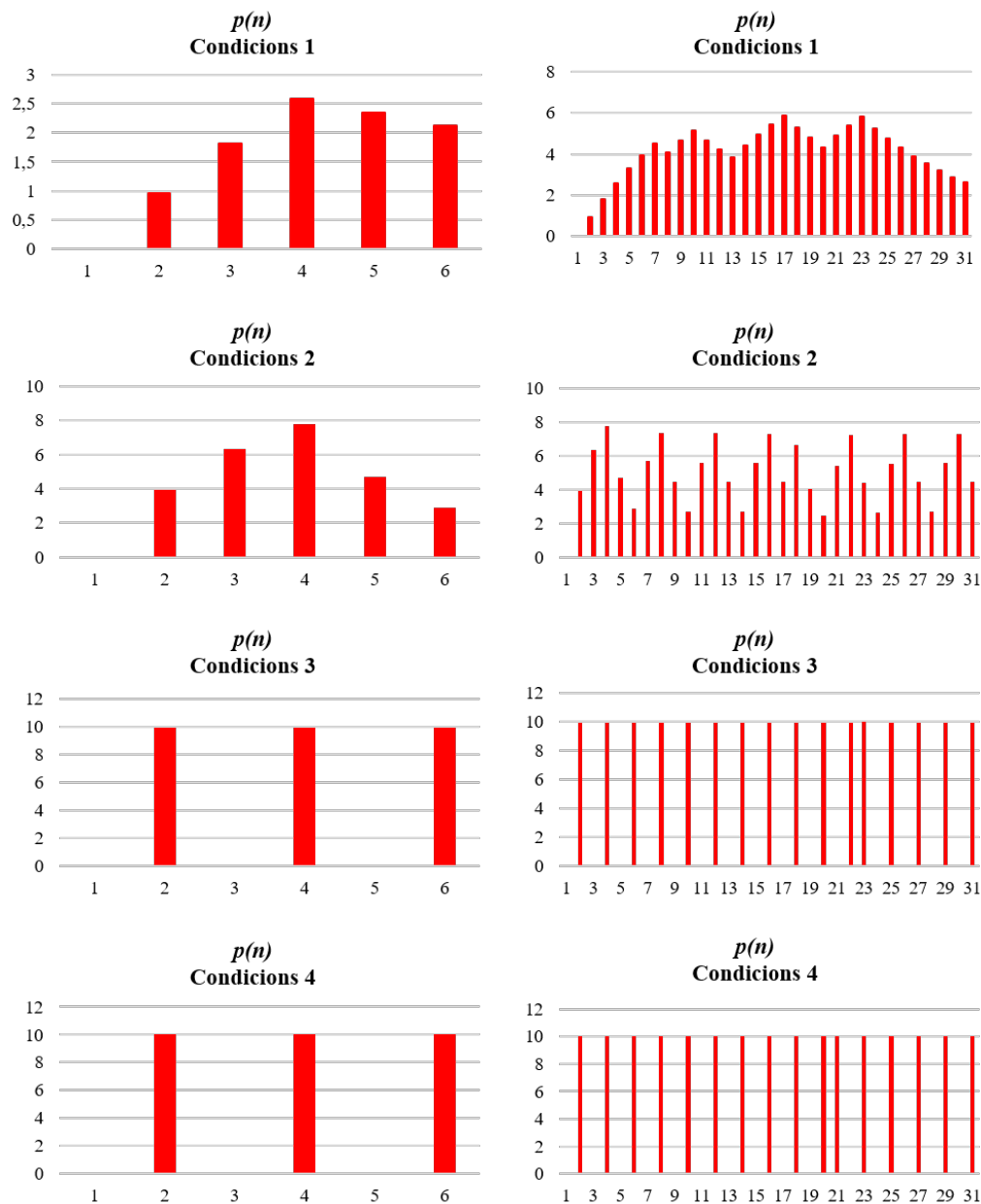


Figura 7: Gràfiques preu en funció de Q

Les 4 gràfiques, lògicament, són del mateix tipus. La única diferència entre elles serà el pendent, m , que canvia per cada condició.

A banda de la relació dels paràmetres entre ells, cal afegir un comentari sobre els beneficis que afecta al preu en sí. Durant l'anàlisi de les simulacions disminuint el període de mostratge, es representa una disminució dels beneficis finals en cada cas. Aquesta disminució no és abrupta sinó subtil. La causa d'aquest ajustament en el resultat final dels beneficis és deguda principalment per a un major acolliment dels preus a la realitat. Al disminuir el període de mostratge i al seu torn augmentar el nombre de mostres totals respecte al període més petit, es calculen més preus i el benefici total és més precís que en els casos anteriors. En resum, al augmentar el període de mostratge s'apropen més les simulacions a la realitat, fet que provoca que l'evolució dels paràmetres sigui més precisa i real.

Finalment, cal esmentar un fet que ocorre amb tots els paràmetres i amb el preu es pot verificar molt fàcilment. En les simulacions executades en aquest projecte i en aquest primer bloc de simulacions, s'ha volgut realitzar dos casos ben diferenciats amb el nombre de mostres preses per a demostrar la influència que tenen cada un d'ells. Les mostres preses han estat de o bé $N=5$ o bé $N=30$.

Figura 8: Gràfiques preu en funció de N

En les gràfiques de les condicions 3 i 4 per $N = 5$, sembla que el preu en les mostres 3 i 5 és pràcticament zero. Això implica que gairebé s'ha assolit Q_m i per això el preu s'acosta al zero.

És perfectament observable el que s'ha comentat per sobre dels gràfics. En els casos d'una mostra de $N = 5$, el que es representa és una petita part del que es produeix quan s'estudia una mostra més gran de $N=30$. És a dir, en el cas $N = 30$ hi ha un comportament periòdic la base del qual s'observa en el cas $N = 5$.

- **Anàlisi de la velocitat d'extracció u**

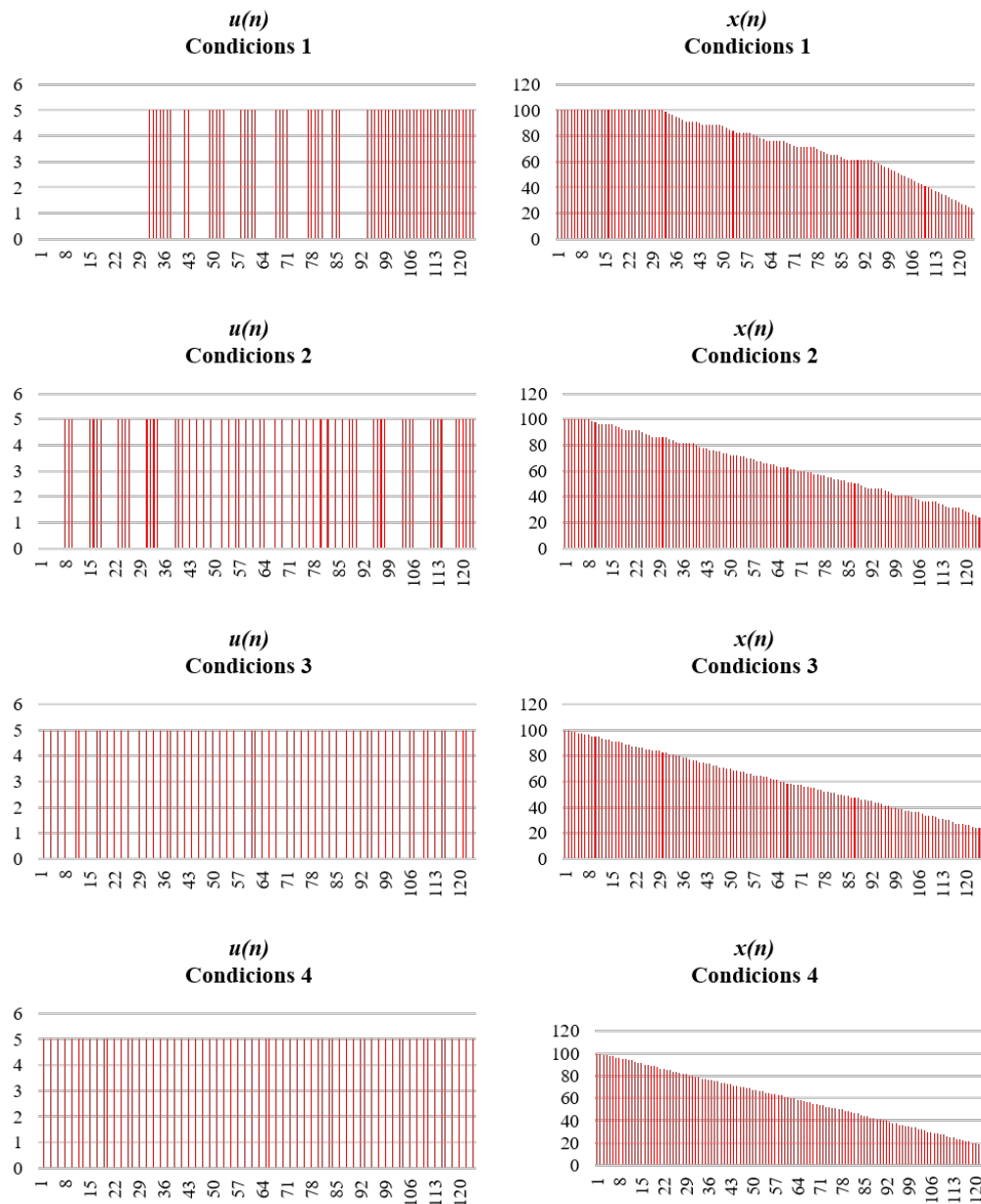
La velocitat d'extracció del producte de l'emmagatzematge és la variable de control del problema. El valor de la velocitat d'extracció del producte es fixarà i serà el mateix en tots els casos de simulacions. Ara bé, el que s'haurà de controlar i determinar serà la seqüència d'extracció del producte. És a dir, quins seran els temps d'extracció durant tot el procés per a aconseguir un màxim benefici.

En l'apartat *Solver Excel* s'ha explicat detalladament quin és el funcionament de l'eina d'optimització i quin seran els resultats que es busquen amb ella. Per tant, mitjançant aquesta metodologia obtindrem la seqüència que reproduirà la velocitat d'extracció al llarg de tota la simulació. Aquesta seqüència serà, òbviament, diferent en cada una de les condicions imposades.

Els valors que pot prendre aquesta variable són únicament dos: en el cas que no s'extreu i en el cas que s'extregui producte. Per al primer cas el valor de la u serà 0 i en el segon cas prendrà un valor de $u_m = 5$ unitats, valor que serà el mateix en tots els casos de simulacions per a poder fer comparacions reals. Aquesta variable acaba prenent només aquests dos valors per la pròpia naturalesa del problema (explicat detalladament a l'apartat 5.2.2).

Pel que fa a la relació de la velocitat d'extracció amb altres variables dintre del problema, principalment es troba connectada amb la quantitat de producte que roman dins l'emmagatzematge, la quantitat d'estoc del producte al mercat, el preu del producte, el benefici total de l'extracció i amb la variable sigma. Cap d'aquestes relacions és lineal ni té cap mena d'equació que regeixi la seva connexió. L'explicació de tot això és degut a què aquesta variable depèn única i essencialment de Hamiltonià (explicat a l'apartat 5.2.2).

Es començarà analitzant la relació de la velocitat d'extracció del producte amb la quantitat de producte que roman a l'emmagatzematge. Naturalment, com més s'extregui del lloc, menys producte romandrà dintre d'ell, ja que es fa la hipòtesi de que no es reproduceix per ell sol ni que se n'introdueix més que l'inicial. Aleshores, en els moments en què la u_m pren valors positius, la x minva, en tots el casos de simulacions.

Figura 9: Gràfiques de la relació entre u i x

Contràriament, la relació que mantenen la u amb la Q és positiva. Durant tot el temps que la u_m és igual a 0 i per tant no s'extreu, lògicament l'estoc que hi ha en el mercat del producte cada cop va sent més petit, ja que no se li afegeix més producte del que té i es va esgotant. Quan la u_m comença a prendre valors positius, és a dir, quan s'extreu producte, l'estoc en el mercat es va fent més gran ja que se li introdueix més material.

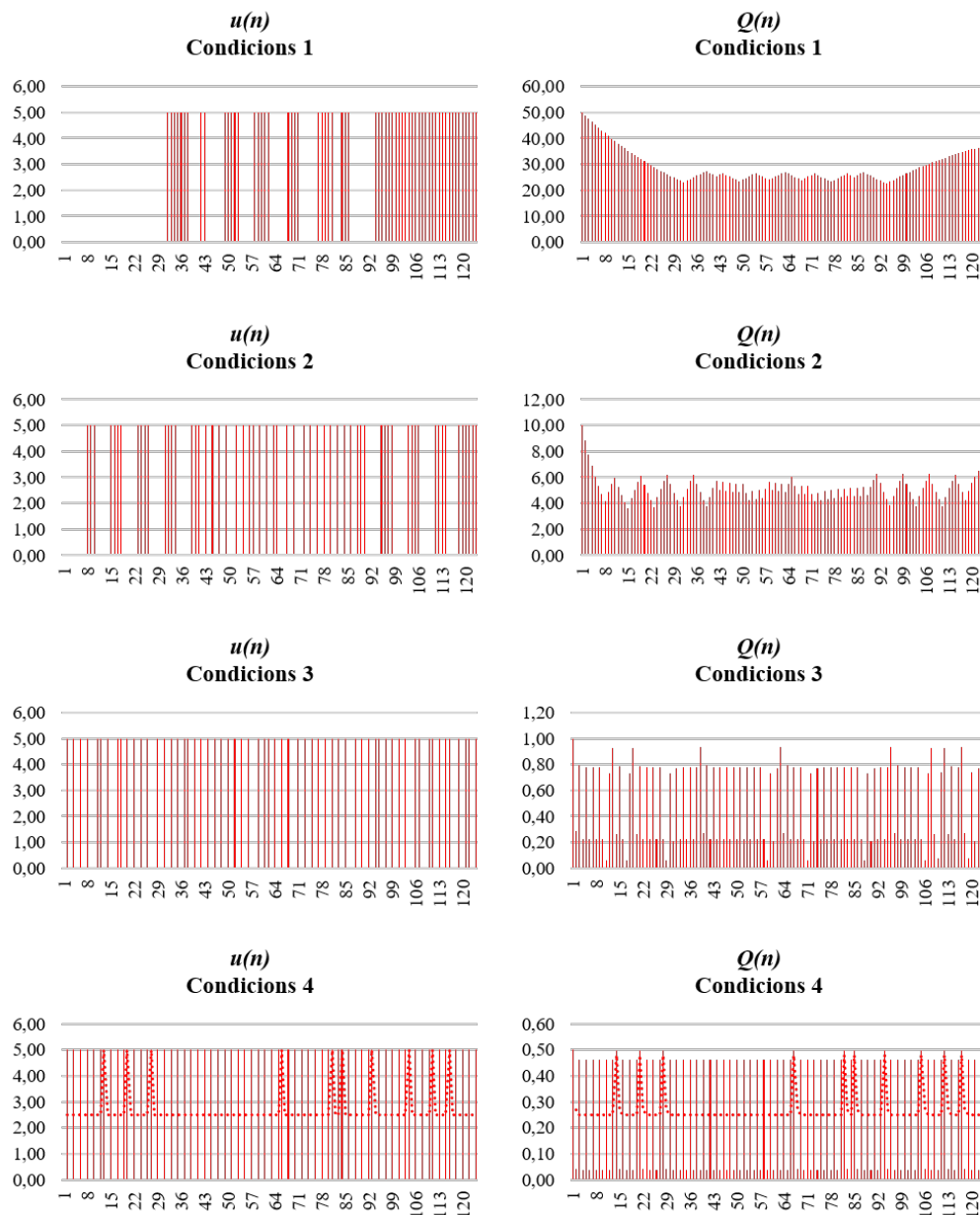


Figura 10: Gràfiques de la relació entre u i Q

Cal fixar-se que en els punts en què la u_m pren el seu valor màxim, la Q comença a créixer i quan la u_m és nul·la, la Q decreix. En els casos 3 i 4 aquesta relació esmentada es representa en forma de relació constant, ja que l'acció de la u és intermitent i no hi ha cap tram prolongat d'extracció ni no-extracció.

Tenint en compte que la quantitat de producte en el mercat (Q) i el preu del producte (p) mantenen una relació lineal negativa, l'efecte que té la velocitat d'extracció sobre la p és el contrari que té sobre la Q . Es detecta que el preu del producte augmenta quan no s'extreu producte. Això es deu a què a menor oferta de producte en el mercat, major és el preu d'aquest per a poder compensar els beneficis totals que s'obtingran. Una vegada es

comença a extreure, el preu del producte disminueix ja que al haver-hi més producte en el mercat, amb menys preu es cobriran els mateixos beneficis.

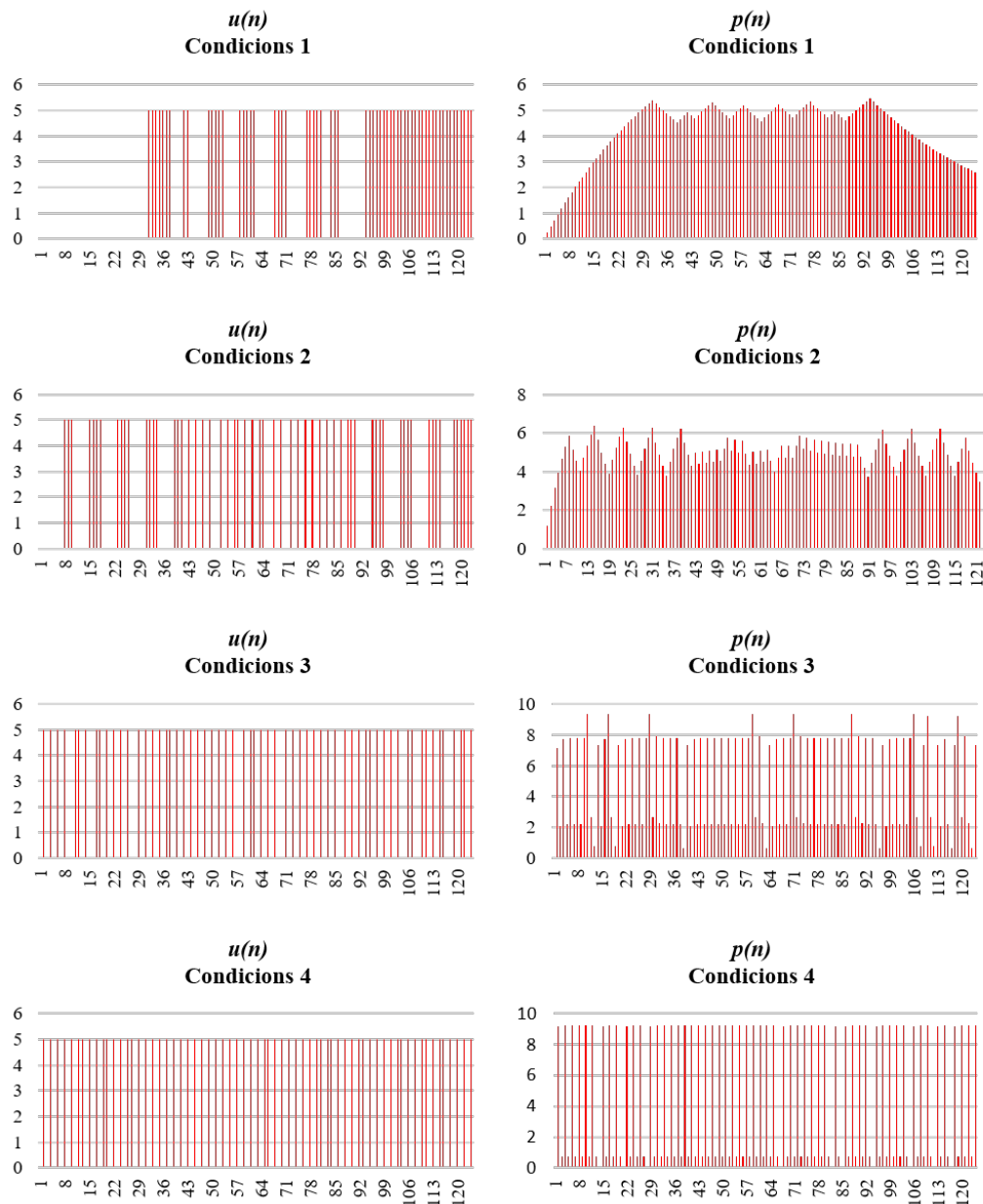


Figura 11: Gràfiques de la relació entre u i p

Com també s'apreciava amb la quantitat de producte en el mercat, en els casos de condicions 3 i 4, no hi ha cap canvi accentuat ni de pujada de preu ni de baixada, roman al voltants de les 8 unitats en el cas 3 i al voltant del preu màxim de 10 unitats en el cas 4.

Un dels aspectes més importants que comporta la velocitat d'extracció del producte és la influència sobre el benefici final del procés. Un concepte clar i comprensible és el fet de que quan s'extreu producte de la mina, això vol dir que es portarà al mercat i serà venut als clients interessats, conseqüentment afectant al benefici de la seva corresponent extrac-

ció. Amb anterioritat s'ha explicat que el benefici màxim no s'obtindrà amb l'extracció ininterrompuda de recurs, sinó que es requerirà d'una seqüència de u determinada per a arribar al punt òptim d'extracció. Ara bé, el fet d'extreure producte, arribant o no al punt òptim, sempre es veurà reflectit en un augment puntual del benefici, que es mantindrà estable si no s'extreu més o pujarà si es segueix extraient. Tots aquests efectes es plasmen en els gràfics a continuació.

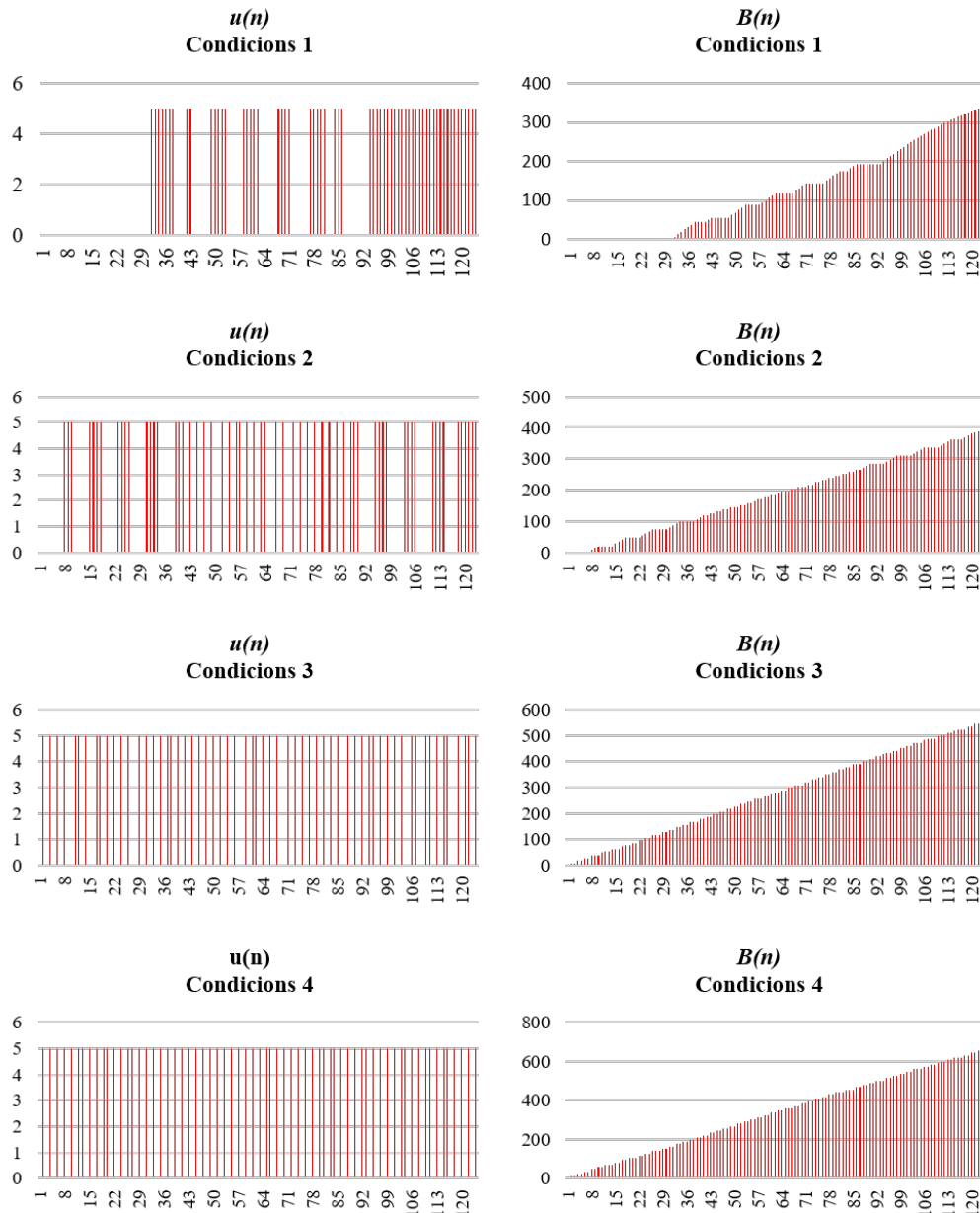


Figura 12: Gràfiques de la relació entre u i el benefici

Per acabar, la variable amb la que la velocitat d'extracció té una relació més directa és σ . Cal recordar que σ equival al coeficient de la u i, aleshores, té una connexió completament directa amb ella. La relació d'aquestes dues variables s'ha descrit anteriorment en l'apartat

5.2.1. Els gràfics comparatius que es mostres més abaix representen clarament aquesta relació.

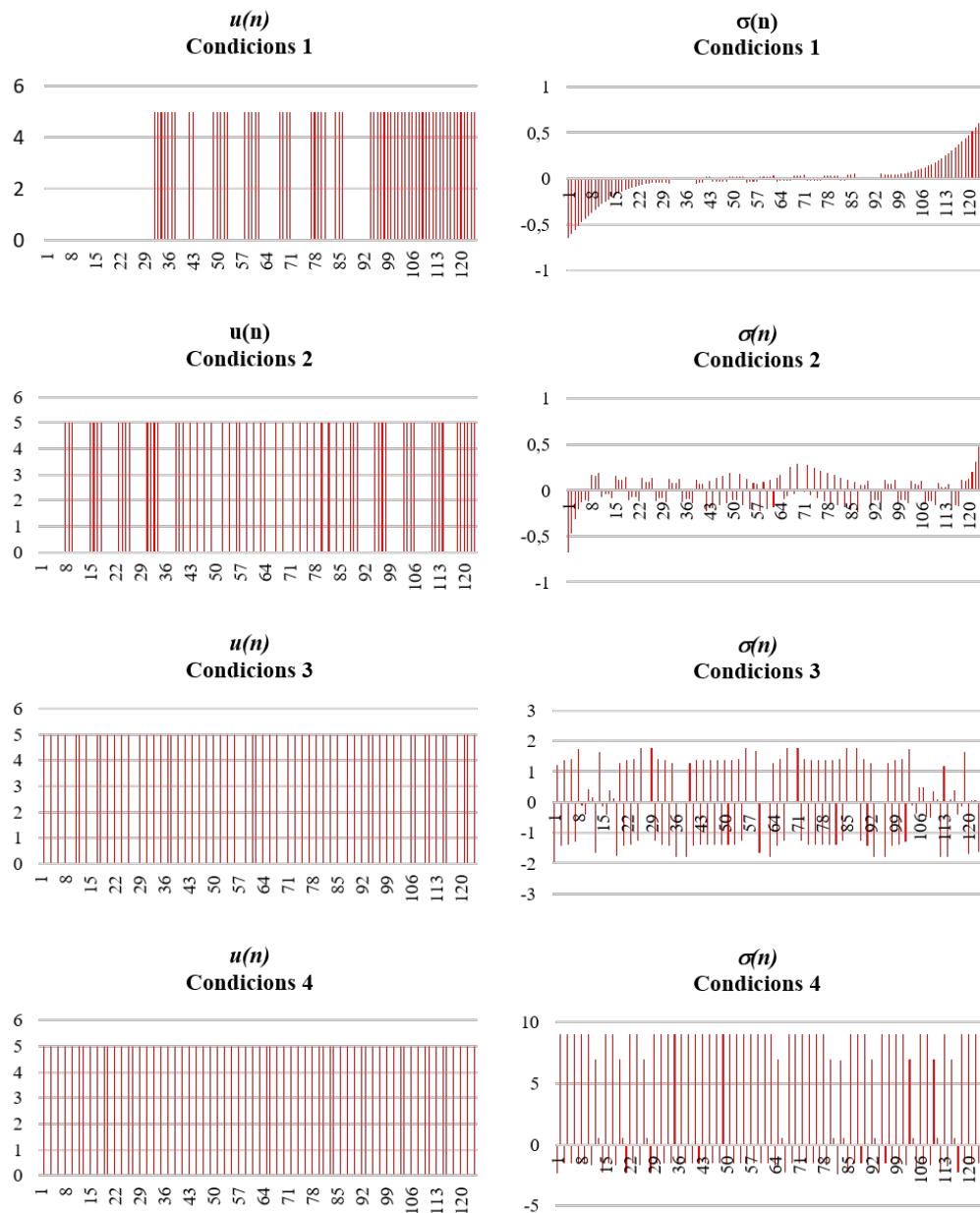


Figura 13: Gràfiques de la relació entre u i σ

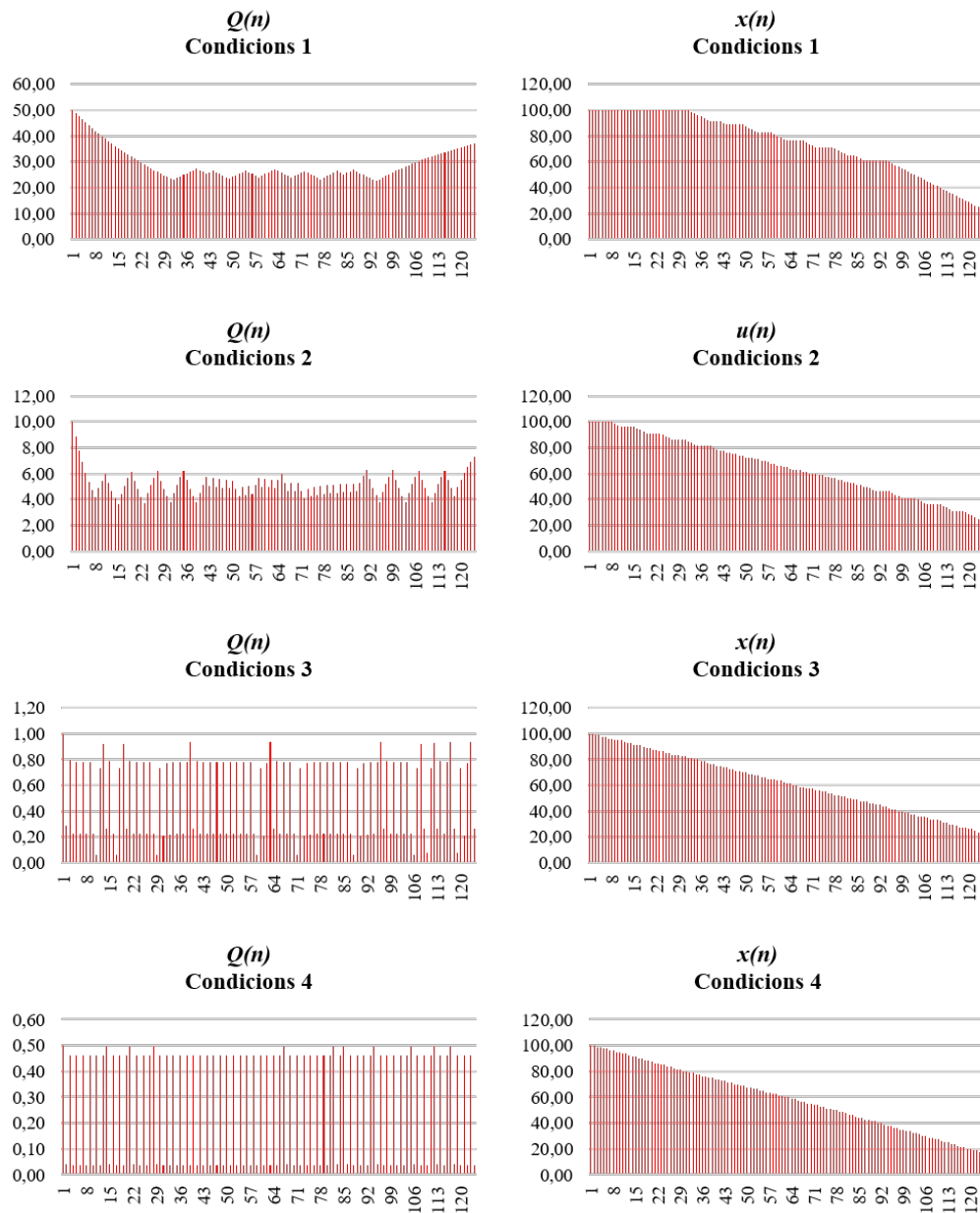
- **Anàlisi de Q**

La quantitat de producte en estoc que roman en el mercat ve representat pel paràmetre Q i la seva fórmula en temps discret té la forma següent.

EQUACIÓ DE Q

$$Q(n+1) = \frac{u(n)}{\rho}(1 - e^{-\rho T}) + Q(n)e^{-\rho T} \quad (72)$$

El valor de la Q serà un valor que vendrà determinat matemàticament per les variables de la seva fórmula, que són la velocitat d'extracció, la constant de peribilitat i el període de mostratge. Tot i així, com bé s'ha esmentat i explicat prèviament, amb el preu hi té una relació lineal negativa (veure apartat *Anàlisi del preu*) i amb la velocitat d'extracció hi té una connexió lògica d'enteniment del concepte, explicat també en l'apartat *Anàlisi de la u*. A més a més d'aquestes relacions, la Q i la x es troben directament connectades degut a què ambdues gestionen el mateix recurs. En resum, tot el que s'extreu x va a parar al mercat en forma de Q . Seguit es mostra la aquesta connexió.

Figura 14: Gràfiques de la relació entre Q i x

Cal comentar els valors que prenen les variables Q_m i Q_0 . La primera fa referència a la quantitat de producte màxim que hi pot haver en estoc en el mercat, mentre que la segona es refereix a la quantitat de producte inicial del procés que es troba en estoc. El valor que ha de prendre la primera variable s'ha explicat anteriorment en l'apartat anterior. D'altra banda, s'ha debatut quin hauria de ser el valor de la Q_0 més adequat per realitzar un millor anàlisi. Es va acordar finalment que el valor que hauria de prendre inicialment l'estoc del producte hauria de ser entre 0 i la Q_m del problema ($Q_0 \leq Q_m$). Si la Q_0 que s'escollís fos més gran que la Q_m , aleshores no tindria sentit l'estudi ja que no seria un resultat verídic i realment, si ho fitxéssim així, durant les simulacions els resultats començarien a tindre sentit un cop abaixessin el valor màxim de l'estoc. Per tant, es decideix que per a

aconseguir un estudi més real i rigorós cal triar una Q_0 igual a la Q_m , així llavors la Q farà la forma que ha de tenir des del principi fins al final de la simulació.

$$Q_0 \leq Q_m \quad \Longleftrightarrow \quad Q_0 = Q_m \quad (73)$$

Finalment, un altre punt d'interès sobre les variables del problema és amb quin valor final acaben la simulació i què afecta a aquest valor final. Les possibles causes de la variació d'aquest valor poden ser o bé el període de mostratge o bé les condicions escollides per als paràmetres variables. Aquestes dues fonts de canvis de simulació són les que han fet estudiar el problema amb més profunditat i varietat. Per tant, és possible que també afectin al valor final de les variables. Aleshores, a continuació s'ha elaborat una taula representativa dels valors finals de la Q en cada una de les simulacions, classificades segons períodes i condicions dels paràmetres fixes.

Taula 6: Evolució de les Q_f al final de cada simulació

		T	$T/2$	$T/4$
CONDICIONS 1	N=5	39,38	39,90	40,15
	N=30	36,95	36,81	37,06
CONDICIONS 2	N=5	7,14	7,22	7,1
	N=30	5,57	6,88	7,29
CONDICIONS 3	N=5	0,0066	0,075	0,21
	N=30	0,0066	0,075	0,26
CONDICIONS 4	N=5	$2,27 \cdot 10^{-5}$	0,0033	0,037
	N=30	$2,27 \cdot 10^{-5}$	0,0033	0,037

Les conclusions que podem extreure d'aquesta taula no són gaire precises tot i que ens donen una idea del funcionament de les simulacions. Tenint en compte el període de mostratge de cada cas, en algunes condicions els valors finals de la Q són pràcticament iguals que amb períodes més grans i amb altres casos difereixen de dècimes o centèsimes. Es dedueix que, per Q 's més grans, la diferenciació dels valors finals és menys abrupta ja que les unitats no canvien però, en canvi, però Q 's més petites, com les diferenciacions són de dècimes o centèsimes, els canvis són més accentuats.

Tampoc es pot extreure cap conclusió exacta tenint en consideració les condicions. Cada condició varia el seu valor final sense seguir cap línia.

Les úniques conclusions fixes i conegudes que es poden establir són l'efecte de les mostres i el conseqüent acostament dels resultats a la vida real. Tal i com es pot observar en els casos amb Q 's amb números més grans, quan es canvia de N petita a N gran, els valors de les Q 's disminueixen ja que durant el procés s'han agafat més mostres i més reals. Es conclou que les aproximacions més precises a la realitat seran aquelles amb mostres més grans i períodes de mostratge més petit.

- **Anàlisi de x**

La quantitat de producte que es troba dins la mina és un paràmetre variable del problema i es calcula mitjançant la fórmula en temps discret que segueix.

EQUACIÓ DE x

$$x(n+1) = x(n) - Tu(n) \quad (74)$$

L'explicació de la fórmula és bastant comprensible i es basa en el següent: la quantitat de producte que es tindrà en l'instant següent és la quantitat que tinc ara menys el que s'hagi extret (velocitat d'extracció per temps d'extracció).

Les relacions del paràmetre x amb els altres paràmetres implicats en el problema ja s'han clarament explicat en els apartats *Anàlisi de la velocitat d'extracció* i *Anàlisi de la quantitat de producte en estoc en el mercat*. Les tres variables estan interrelacionades entre elles ja que les consideren quantitats de producte i la fluctuació d'aquest al llarg de tot el problema afectarà a les 3 conjuntament. Altres variables com el preu, λ_2 o σ no mantenen cap mena de connexió amb la x .

Així com s'ha elaborat amb la variable Q , la quantitat de producte que roman dins l'emmagatzematge a cada final de simulació s'han posat en conjunt en la taula següent. El que vol determinar és si hi ha algun patró o línia que es segueixi segons el període o les condicions de cada cas.

Taula 7: Evolució de les x_f al final de cada simulació

		T	$T/2$	$T/4$
CONDICIONS 1	N=5	90	87,5	86,25
	N=30	25	25	23,75
CONDICIONS 2	N=5	90	87,5	86,25
	N=30	30	25	23,75
CONDICIONS 3	N=5	90	87,5	86,25
	N=30	30	22,5	17,5
CONDICIONS 4	N=5	90	87,5	85
	N=30	30	22,5	17,5

Es resumeix que no s'ha trobat patró que es segueixi en cap cas, ni per períodes ni per condicions escollides, per a ajustar els valors finals de la variable x . Es pot determinar que els casos sempre van disminuint o almenys mantenint la seva x , degut a què les mostres preses són més acurades i la periodicitat amb la que es pren el producte creix. Alhora, en la majoria dels casos, independentment de les condicions, les x 's finals són o bé les mateixes o bé molt semblants.

De la mateixa manera que ocorre amb la quantitat d'estoc al mercat, tant augmentant les mostres representades com disminuint el període de mostratge d'aquestes, l'acostament dels resultats a la realitat cada cop és més real.

- **Anàlisi de λ_2**

El significat matemàtic d'aquest paràmetre s'ha explicat en l'apartat inicial de *x Multiplcadors de Lagrange*. El preu ombra és un concepte important ja que manifesta la influència que té cada petit canvi en x i en Q (segons termes del Hamiltonià) sobre el valor òptim final del benefici.

Per a calcular el valor de λ_2 en totes les simulacions, s'ha usat la formulació trobada a l'apartat x. *x Aplicació de les fórmules en temps discret.*

EQUACIÓ DE λ_2

$$\lambda_n^2 = \frac{\partial H}{\partial Q} = -mu(n)T + \lambda_{n+1}^2 e^{-\rho T} \quad (75)$$

Tal i com s'ha esmentat en l'apartat x, els valors de la variable λ_2 evolucionaran al llarg de tot el procés d'extracció i del producte.

A la fórmula de càlcul de la λ_2 es pot observar que el primer terme depèn del següent. Això implica que no es podrà començar a tenir un primer valor de λ_2 sense saber el següent. Per solucionar aquesta problemàtica, el que es fa fixar el darrer valor de λ_N^2 igual a 0. Per tant, el valor final del paràmetre ja és conegut. Aleshores, per a prosseguir amb les calculacions, enlloc de calcular els valors de λ_2 de dalt a baix, es calcularan de baix a dalt. És un procés invers a tota la resta de càlculs però els resultats són correctes.

- **Anàlisi del benefici**

La funció del benefici és la funció de la qual es busca trobar el seu òptim (en aquest problema, el màxim) ja que és el paràmetre que determina econòmicament la millor opció d'una manera precisa. Tenint en compte que en el problema es tracten temes de mercat, escollir el benefici econòmic com a determinant per la tria de la opció òptima és el més adequat.

El càlcul del benefici té en compte el preu, la velocitat d'extracció i el període de mostreig i s'escriu de la manera que segueix.

EQUACIÓ DEL BENEFICI

$$B(n) = B(n-1) + p(n)u(n)T$$

$$B(0) = p(0)u(0)T$$

Les possibles qüestions referents als beneficis obtinguts en les simulacions poden englobar dubtes com la influència del període de mostratge, de la mida de la mostra o bé quina de les condicions escollides resulta en un major benefici total. Per aquesta raó, la taula de sota ajunta totes aquestes divagacions.

Cal destacar d'aquesta taula, primerament, la diferenciació de beneficis obtinguts per cada condició escollida diferent. Bàsicament, els beneficis van augmentant a mesura que s'augmenta la peribilitat del producte. Al tenir un elevat coeficient de peribilitat implica tenir menys producte en estoc en el mercat. Per tant, a menor oferta, el preu d'aquesta es dispara considerablement. Encara que es tingui poc producte, es vendrà gairebé tot i a un preu molt elevat. En canvi, en el cas de productes poc peribles, en el mercat roman molta oferta d'aquest producte i es va venent més a poc a poc i amb preu més petit.

Taula 8: *Evolució del benefici al final de cada simulació*

		T	$T/2$	$T/4$
CONDICIONS 1	N=5	35,29	34,43	34
	N=30	353,55	346,46	343,06
CONDICIONS 2	N=5	76,69	72,91	69,05
	N=30	445,49	418,04	396,92
CONDICIONS 3	N=5	148,99	138,46	105,81
	N=30	745,31	637,66	555,76
CONDICIONS 4	N=5	149,99	148,99	128,73
	N=30	749,96	745,31	667,13

Tot i que no sigui una de les preguntes de recerca d'aquest projecte, no està de més anomenar quina de les condicions genera un benefici més elevat final. Aquest cas correspon a la condició número 4, on:

$$\left[\begin{array}{l} \rho = 10 \\ Q_m = 0.5 \\ q_0 = 0.5 \\ m = 20 \end{array} \right] \quad (76)$$

Un altre aspecte important a parlar és la influència del període de mostratge sobre el benefici final global. En cada cas i en cada condició esdevé el mateix fet: a menor període de mostratge, menor benefici final. La causa d'aquest esdeveniment és prou senzilla. A mesura que es redueix en període de mostratge en una simulació, aquesta es va acostant més i més al que ocorre en temps continu, és a dir, a la realitat. Cada cop que avança la reducció d'aquest període, es tenen més mostres del preu i s'analitza més profundament aquest. Al fitjar-se cada vegada més cops en el preu de producte, provoca que el benefici de cada tram s'ajusti a aquest. Doncs, el benefici s'ajusta alhora i es van donant resultats més precisos i acords a la realitat. Tots aquests plantejaments es plasmen en les gràfiques a continuació.

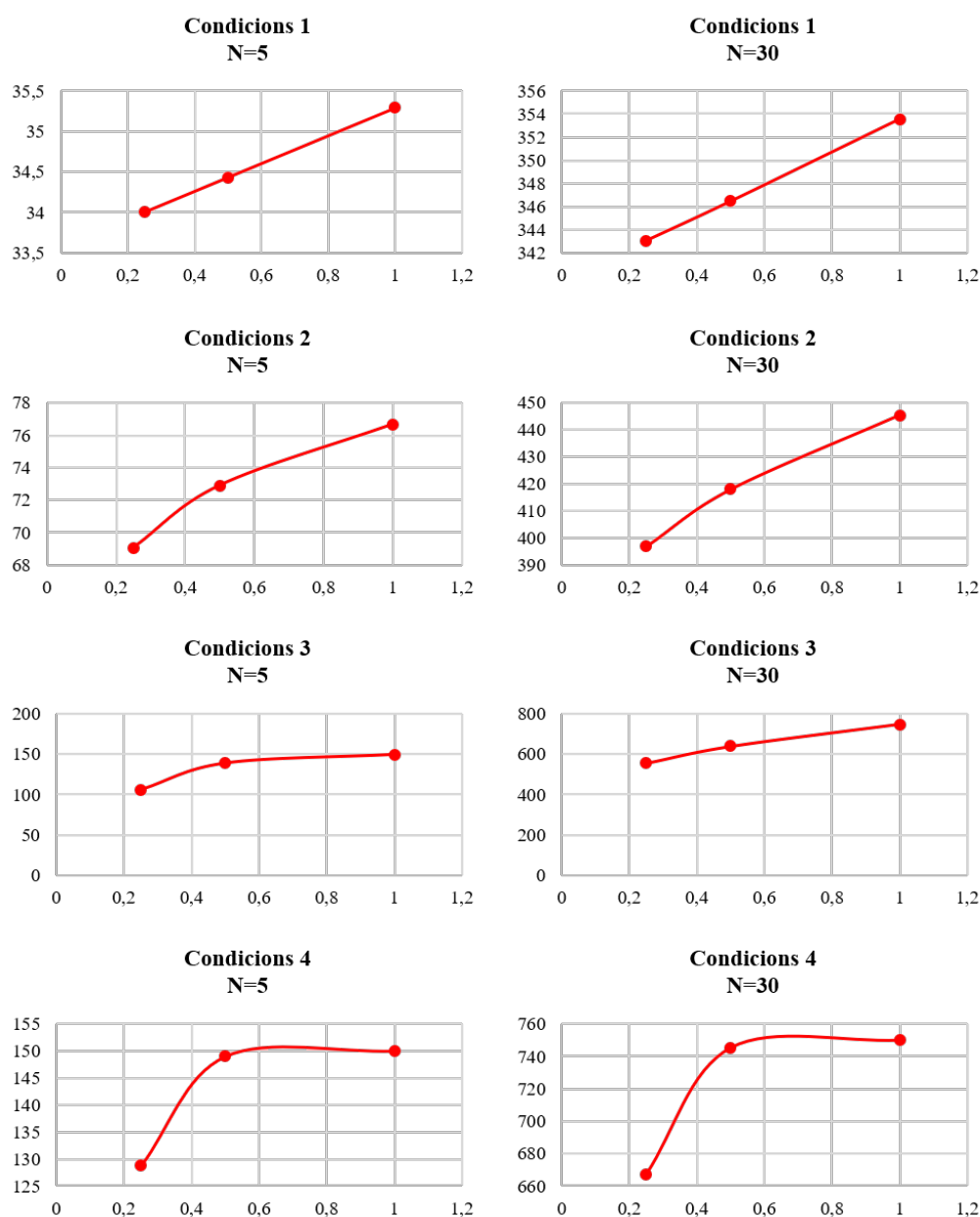


Figura 15: Gràfiques de l'evolució del benefici en funció de T

Un breu comentari sobre l'efecte d'augmentar la mida de mostatge en les simulacions. És ràpidament observable aquest efecte: a major nombre de mostres per període, major benefici final. El raonament d'aquest fet és evident. Amb una mida petita de mostres, només s'agafa una petita part de la realitat. Al augmentar aquestes mostres, més càlculs de beneficis per període són calculats i, per tant, més aprop de la realitat es trobaran aquests. L'augment d'aquest benefici entre mostra petita i mostra gran no segueix cap increment en concret.

No cal detallar en aquest apartat les relacions del benefici amb les altres variables perquè ja s'ha explicat amb anterioritat a les variables implicades.

En resum, el paper que juguen T i N és tal que, com més gran siguin aquests dos factors, més s'acostarà la simulació de la realitat i, consegüentment, al temps continu.

- **Anàlisi de σ**

La darrera variable que cal analitzar és el coeficient de la u , representat amb el paràmetre σ . Aquesta variable ha estat calculada única i exclusivament per a verificar els valors òptims escollits de l'acció de control admissible u per a optimitzar el funcional.

La formulació de σ resulta del Hamiltonià (explicació més detallada en l'apartat *x Aplicació de les fórmules en temps discret* i té la forma següent:

EQUACIÓ DE σ

$$\sigma(n) = p(n) - T\lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2 \left(\frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right) \quad (77)$$

Com es pot veure, en el càlcul de σ hi actuen molts paràmetres. No obstant, la vertadera utilitat d'aquesta variable està sobre la velocitat d'extracció del producte u . σ determinarà quin dels dos valors possibles de la variable u s'ha d'aplicar sobre el sistema per a obtenir el màxim de la funció objectiu del benefici. Si el signe de σ és negatiu, això implicarà que s'ha de optar pel valor més petit de u , és a dir, zero (no extreure). Pel contrari, quan el signe de σ sigui positiu, el valor que haurà de prendre la variable u ha de ser el més gran possible, és a dir, u_m . Això es deu, com ja s'ha explicat a l'apartat *x*, a què σ representa el pendent de la funció Hamiltoniana. Per tant, si es té pendent positiva ($\sigma > 0$), el valor més alt és u_m i si per contra es té pendent negativa ($\sigma < 0$), aleshores el valor més alt serà 0.

En les gràfiques anteriors de l'apartat *Anàlisi de la velocitat d'extracció* es mostra clarament el que s'ha explicat sobre la connexió de u i σ .

5.4 Conclusions en temps discret

Gràcies a les simulacions efectuades en aquest apartat podrem determinar si la teoria explicada a l'apartat 4.2.2 sobre les corbes de $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ es compleixen en temps discret.

Vegi's a sota 4 gràfiques que demostren que la teoria plantejada en temps continu es verifica en temps discret.

Hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ Condicions 1

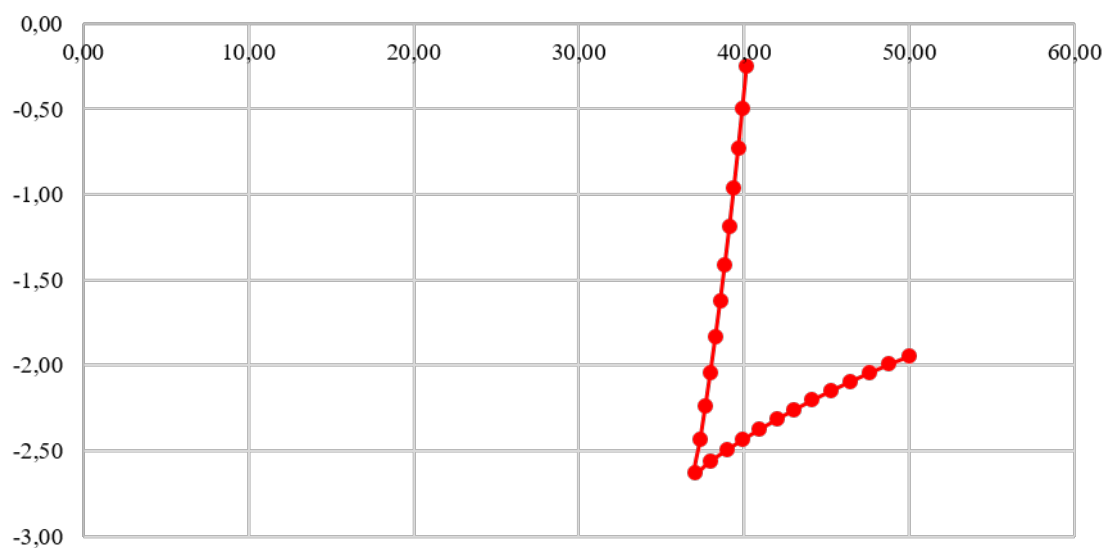


Figura 16: Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 1

Hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ Condicions 2

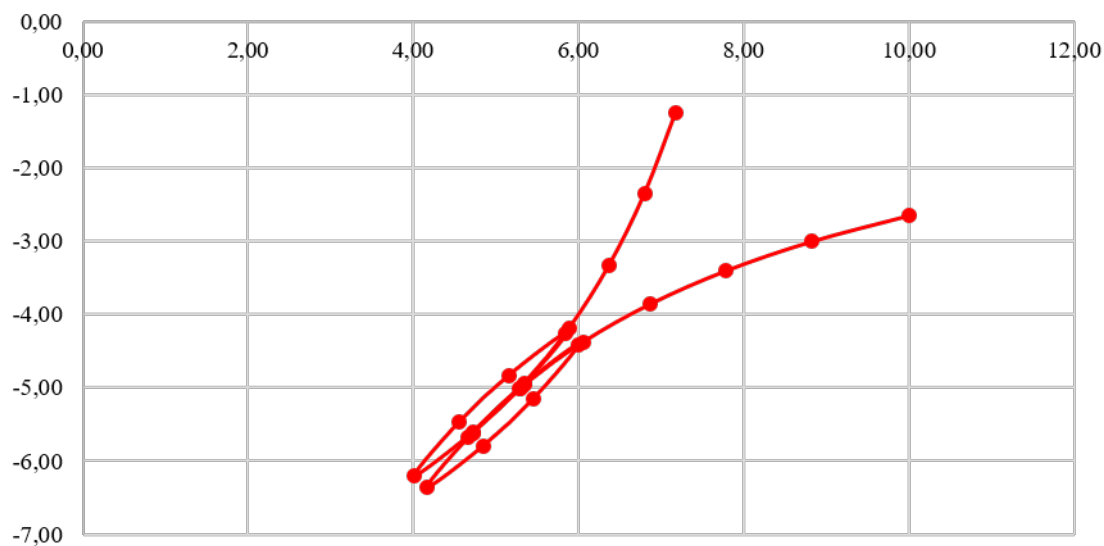


Figura 17: Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 2

Hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ Condicions 3

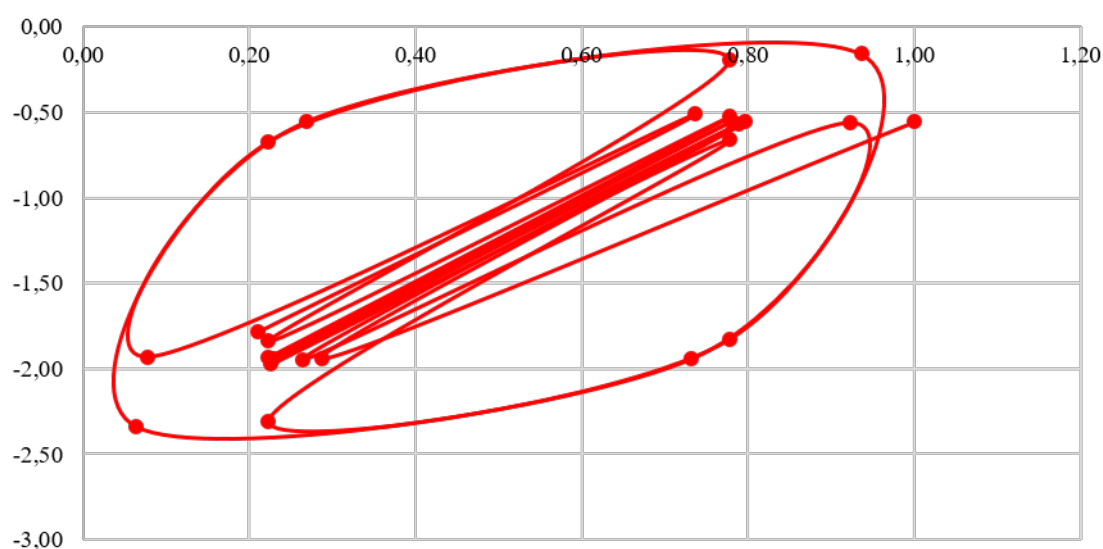


Figura 18: Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 3

Hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ Condicions 4

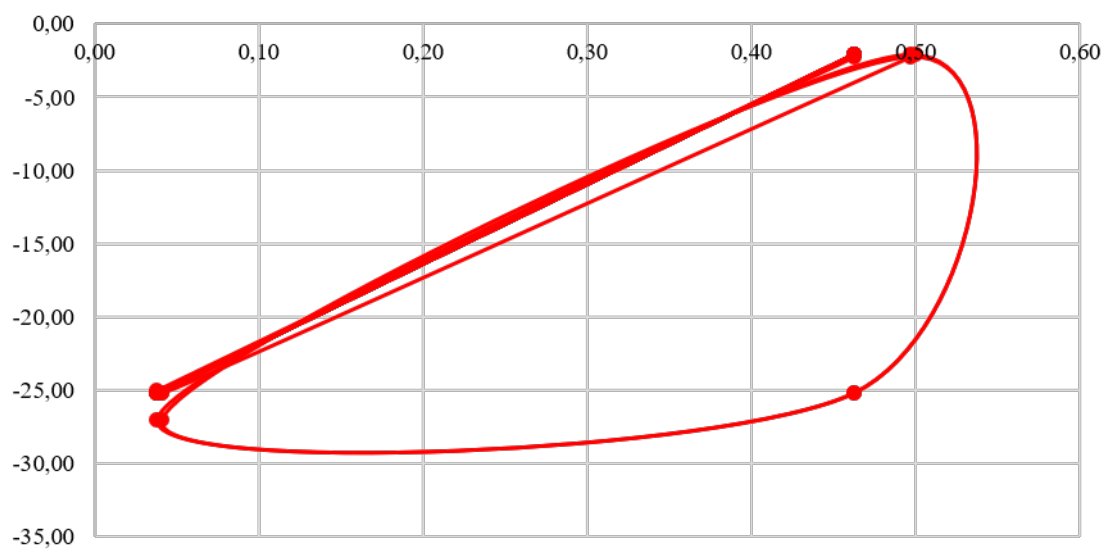


Figura 19: Evolució de les trajectòries sobre les hipèrboles $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ per les condicions 4

Aquestes gràfiques reflecteixen a la perfecció la teoria de temps continu. A la primera, es comença amb $u = 0$ fins que en un punt determinat es canvia a $u = u_m$. En la segona gràfica es comença amb $u = 0$, en un punt canvia a $u = u_m$ i a partir d'allà va alternant fins al final acabar amb $u = u_m$. La tercera gràfica es tracta d'un cas on a cada període es canvia de u , per això l'aspecte que té. Ocorre exactament el mateix per a la darrera gràfica. Es pot concloure, com en el cas de temps continu, les trajectòries de temps discret també evolucionen sobre hipèrboles.

Aquests 4 casos corresponen als casos 17, 18, 19 i 20 i es poden corroborar en l'apèndix *Simulacions i representació gràfica de les simulacions*. Podem concloure amb seguretat que la teoria plantejada en temps continu es verifica en temps discret.

D'altra banda, s'ha comprovat que totes les variables fluctuassin entre els valors que haurien i que totes les relacions entre variables en temps continu es compleixin també en temps discret.

També s'ha pogut observar que, com bé es preveia a l'apartat 4.3 *Hipòtesi del problema òptim en temps continu per un temps finit*, hi ha certs períodes de temps on el sistema es decanta per l'Escenari 1 o per l'Escenari 2. No és una conclusió clara i es plantejarà per a futures recerques el fet de trobar un algorisme que determini d'una manera més precisa aquesta hipòtesi. No obstant, el sistema ha pres les u 's òptimes en cada cas i s'ha obtingut així el màxim benefici en cada cas.

Conclusions

Conclusions del projecte

En primer lloc, es pot concloure que tots els coneixements previs adquirits en les assignatures de Càlcul, Geometria, Equacions Diferencials, Dinàmica de Sistemes i Control Automàtic s'han aplicat correctament en la resolució del problema del projecte. El desenvolupament del problema requeria un alt nivell i comprensió de totes aquestes matèries, així com la recerca i adquisició de nous coneixements en la temàtica (*Teoria del Control Òptim, Principi del Màxim de Pontryagin,...*). Un cop obtinguts els resultats i conclusions de tot el projecte, es pot establir que tant els coneixements previs com els adquirits durant el projecte s'han consolidat satisfactòriament.

En quant al projecte en general, s'han complert els objectius plantejats. En l'apartat de temps continu, primerament s'ha pogut determinar quina és la naturalesa del problema, que en aquest problema ha resultat ser que la velocitat d'extracció u només podrà prendre 2 valors, $u = 0$ i $u = u_m$, i serà gràcies a la combinació i alternança d'aquests dos valors que s'obtindrà el màxim benefici de l'extracció. Per temps infinits d'extracció, s'ha determinat que no existeix solució òptima. En canvi, per temps finits d'extracció, s'ha determinat que existeixen un interval límit de temps on val més la pena extreure, parar l'extracció i tornar a extreure. Paral·lelament, s'han pogut verificar els plantejaments iniciats en temps continu amb les simulacions de temps discret, tals com l'evolució de totes les variables, les trajectòries de $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ i la hipòtesi de l'aturada al mig del període d'extracció.

Cal esmentar que el projecte ha permès a l'estudiant aprofundir i ampliar els seus coneixements en l'àmbit de les matemàtiques aplicades a l'enginyeria. S'ha descobert la valuosa possibilitat que proporciona el Principi del Màxim de Pontryagin de resoldre problemes de control òptim, tant en temps continu com en temps discret.

D'altra banda, aquest projecte ha proporcionat a l'estudiant l'oportunitat de desenvolupar-se en un treball de gran envergadura individualment, havent de millorar així l'aprenentatge autònom així com una comunicació eficaç i clara amb el director del treball. S'ha decidit elaborar la memòria d'aquest Treball de Final de Grau, així com l'apèndix, mitjançant l'eina d'escriptura científica LATEX. Aquesta eina permet la creació de textos científics, tècnics i acadèmics, en un format molt més professional.

Per acabar, es pot concloure que tant els resultats obtinguts com les justificacions de totes les teories plantejades aconsegueixen satisfactòriament els objectius inicialment proposats pel projecte.

Futures preguntes de recerca

Un cop analitzats els resultats obtinguts i fetes les conclusions oportunes d'aquests (tot explicat en els apartats 4.4 *Conclusions en temps continu* i 5.4 *Conclusions en temps discret*), s'ha decidit elaborar un seguit de propostes per a futures línies d'investigació, recerca o projectes.

La primera correspon a verificar que tots els plantejaments que s'han escrit en temps continu són equiparables per a problemes en temps discret. Per exemple, en el projecte s'ha determinat que les trajectòries de $\lambda_2(t)$ i $Q(t)$ són les mateixes en temps continu que en temps discret (funció hiperbòlica). Una possible pregunta de recerca podria ser comprovar que tots els punts en temps

discret es compleixen per temps continu. O bé trobar la relació de la gràfica en temps continu amb la gràfica en temps discret.

Una altra potencial pregunta d'investigació futura podria ser la recerca o el desenvolupament d'un algorisme que utilitzi el Principi del Màxim de Pontryagin per a poder determinar quin és el control òptim que s'ha d'aplicar quan la variable σ és igual a zero i, per tant, a primera vista, tant $u = 0$ com $u = u_m$ són vàlides.

Agraïments

Agrair en primer lloc, i més important, al meu tutor del Treball de Final de Grau, Enric Fossas. Agrair la seva activa col·laboració des del començament del projecte fins al final. Agrair tota la dedicació i temps que, setmana rere setmana, feia avançar el projecte i que cada cop anés agafant més cos. Ens hem entès molt bé a l'hora de pensar, executar i concloure aquest treball i penso que no hagués estat possible sense la seva ajuda. Gràcies Enric.

Agraeixo també tot el suport que la meva família, tot i el mar que ens separa, m'ha proporcionat aquests anys de carrera. Tota l'estima, ànims i recolzament han arribat fins Barcelona i han fet possible que hagi arribat on sóc ara i sigui qui sóc.

També vull agrair a les meves companyes de pis (ara més que amigues) la meravellosa convivència d'aquests 3 anys. Per haver-me animat en els meus pitjors moments, per compartir la vida i per sempre mantenir el bon rotllo que us caracteritza.

Finalment, agrair a tota la família del Forum 2017, 2018 i 2019 per haver esdevingut la meva segona família, per estar en els bons i mals moments, però sobretot per sempre estar allà quan us necessito.

Gràcies a tots.

Apèndix

1. Demostració del desenvolupament de les equacions en temps continu per Q i λ_2 segons els valors $u = 0$ i $u = u_m$

a) Suposem que per $t \in [t_0, t_1]$, el valor que pren la variable $u = 0$. Les equacions diferencials que descriuen el problema són les següents:

$$1. \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = u|_{u=0} - \rho Q|_{u=0} = -\rho Q \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\rho Q; \\ \frac{dQ}{Q} &= -\rho dt; \\ \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} &= \int_0^t -\rho dt; \\ \ln(Q) - \ln(Q_0) &= -\rho t; \\ \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) &= -\rho t; \\ Q &= Q_0 e^{-\rho t} \end{aligned}$$

$$2. \dot{\lambda}_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = -mu|_{u=0} + \lambda_2 \rho|_{u=0} = \lambda_2 \rho \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} &= \lambda_2 \rho; \\ \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} &= \rho dt; \\ \int_{\lambda_{2,0}}^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} &= \int_0^t \rho dt; \\ \ln(\lambda_2) - \ln(\lambda_{2,0}) &= \rho t; \\ \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{2,0}}\right) &= \rho t; \\ \lambda_2 &= \lambda_{2,0} e^{\rho t} \end{aligned}$$

b) Suposem que per $t \in [t_0, t_1]$, el valor que pren la variable $u = u_m$. Les equacions diferencials que descriuen el problema són les següents:

$$1. \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = u]_{u=u_m} - \rho Q]_{u=u_m} = u_m - \rho Q \quad (80)$$

Aquesta equació té un punt d'equilibri a:

$$\hat{Q} = \frac{u_m}{\rho};$$

Es fa el canvi de variable següent:

$$z = Q - \frac{u_m}{\rho};$$

$$Q = z + \frac{u_m}{\rho};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dQ}{dt} = u_m - \rho Q = u_m - \rho \left(z + \frac{u_m}{\rho} \right) = -\rho z;$$

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{z} = \int_0^t -\rho dt;$$

$$\ln(z) - \ln(z_0) = -\rho t;$$

$$\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = -\rho t;$$

$$z = z_0 e^{-\rho t};$$

$$z_0 = Q_0 - \frac{u_m}{\rho};$$

Es desfà el canvi de variable:

$$Q(t) - \frac{u_m}{\rho} = e^{-\rho t} \left(Q_0 - \frac{u_m}{\rho} \right);$$

$$Q(t) = e^{-\rho t} \left(Q_0 - \frac{u_m}{\rho} \right) + \frac{u_m}{\rho};$$

$$Q(t) = \left(\frac{u_m}{\rho} \right) (1 - e^{-\rho t}) + Q_0 e^{-\rho t}$$

$$2. \dot{\lambda}_2 = -m u]_{u=u_m} + \lambda_2 \rho]_{u=u_m} = m u_m + \lambda_2 \rho \quad (81)$$

Aquesta equació té un punt d'equilibri a:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{-mu_m}{\rho};$$

Es fa el canvi de variable següent:

$$z = \lambda_2 + \frac{mu_m}{\rho};$$

$$\lambda_2 = z - \frac{mu_m}{\rho};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt} = mu_m + \lambda_2 \rho = mu_m + \left(z - \frac{mu_m}{\rho}\right) \rho = z\rho;$$

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{z} = \int_0^t \rho dt;$$

$$\ln(z) - \ln(z_0) = \rho t;$$

$$\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = \rho t;$$

$$z = z_0 e^{\rho t};$$

$$z_0 = \lambda_{2,0} e^{\rho t};$$

Es desfà el canvi de variable;;

$$\lambda_2(t) + \frac{mu_m}{\rho} = e^{\rho t} \left(\lambda_{2,0} + \frac{mu_m}{\rho} \right);$$

$$\lambda_2(t) = e^{\rho t} \left(\lambda_{2,0} + \frac{mu_m}{\rho} \right) - \frac{mu_m}{\rho};$$

$$\lambda_2(t) = \frac{mu_m}{\rho} (e^{\rho t} - 1) + \lambda_{2,0} e^{\rho t}$$

2. Simulació i representació gràfica de les simulacions en temps discret (bloc gran)

Condicions 1

En aquest apartat es mostren tant les simulacions com la representació gràfica d'aquestes per les **condicions 1** del problema.

x_0	p_m	u_m	ρ	Q_m	Q_0	m
100	10	5	0,1	50	50	0,2

Primer tenint en compte **N=5**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 9: Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=1$. CAS 1

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	45,24	100,00	100,00	-2,02	-2,23	0,00	-2,12
1,00	0,95	0,00	45,24	40,94	100,00	100,00	-2,23	-2,46	0,00	-1,39
2,00	1,81	0,00	40,94	37,04	100,00	100,00	-2,46	-2,72	0,00	-0,78
3,00	2,59	5,00	37,04	38,27	100,00	95,00	-2,72	-1,90	12,96	0,78
4,00	2,35	5,00	38,27	39,39	95,00	90,00	-1,90	-1,00	24,68	1,39
5,00	2,12	5,00	39,39	40,40	90,00	85,00	-1,00	0,00	35,29	2,12

Taula 10: Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=0,5$. CAS 9

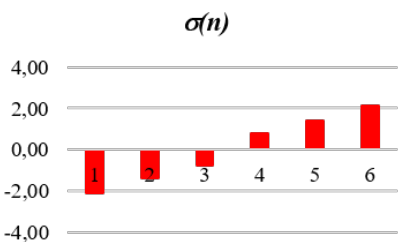
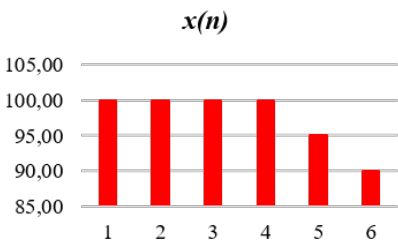
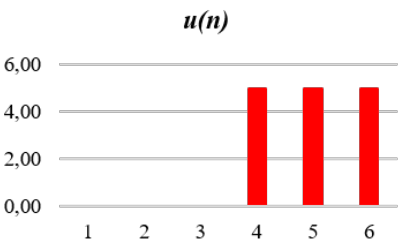
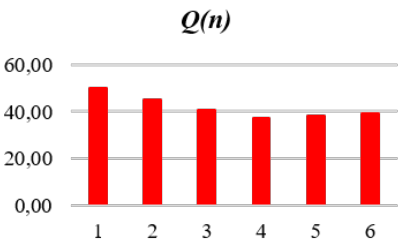
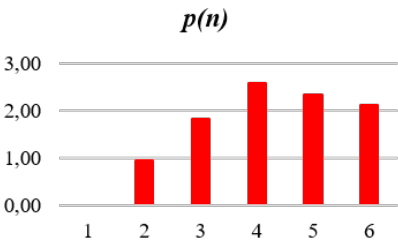
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0	0,00	0	50,00	47,56	100,00	100,00	-1,97	-2,07	0,00	-1,01
1	0,49	0	47,56	45,24	100,00	100,00	-2,07	-2,18	0,00	-0,82
2	0,95	0	45,24	43,04	100,00	100,00	-2,18	-2,29	0,00	-0,64
3	1,39	0	43,04	40,94	100,00	100,00	-2,29	-2,40	0,00	-0,48
4	1,81	0	40,94	38,94	100,00	100,00	-2,40	-2,53	0,00	-0,33
5	2,21	0	38,94	37,04	100,00	100,00	-2,53	-2,66	0,00	-0,19
6	2,59	5	37,04	37,67	100,00	97,50	-2,66	-2,27	6,48	0,19
7	2,47	5	37,67	38,27	97,50	95,00	-2,27	-1,86	12,64	0,33
8	2,35	5	38,27	38,85	95,00	92,50	-1,86	-1,43	18,51	0,48
9	2,23	5	38,85	39,39	92,50	90,00	-1,43	-0,98	24,08	0,64
10	2,12	5	39,39	39,91	90,00	87,50	-0,98	-0,50	29,39	0,82
11	2,02	5	39,91	40,40	87,50	85,00	-0,50	0,00	34,43	1,01

Taula 11: Simulacions en condicions 1 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 17

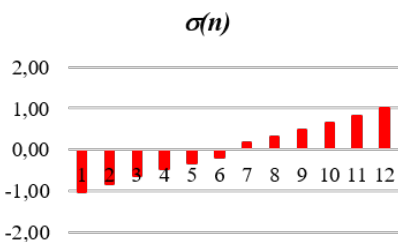
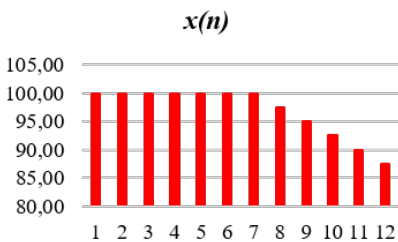
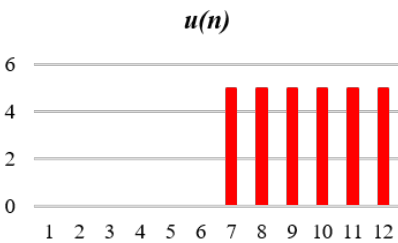
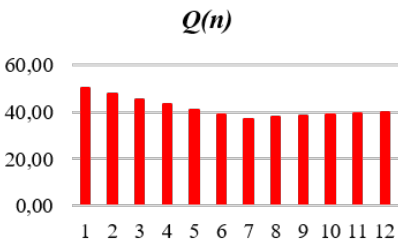
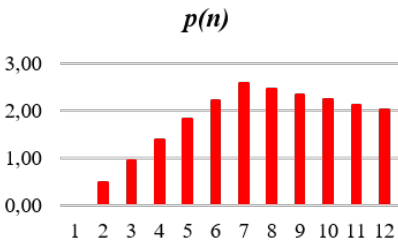
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	48,77	100,00	100,00	-1,94	-1,99	0,00	-0,49
1,00	0,25	0,00	48,77	47,56	100,00	100,00	-1,99	-2,04	0,00	-0,44
2,00	0,49	0,00	47,56	46,39	100,00	100,00	-2,04	-2,10	0,00	-0,40
3,00	0,72	0,00	46,39	45,24	100,00	100,00	-2,10	-2,15	0,00	-0,35
4,00	0,95	0,00	45,24	44,12	100,00	100,00	-2,15	-2,20	0,00	-0,31
5,00	1,18	0,00	44,12	43,04	100,00	100,00	-2,20	-2,26	0,00	-0,26
6,00	1,39	0,00	43,04	41,97	100,00	100,00	-2,26	-2,32	0,00	-0,22
7,00	1,61	0,00	41,97	40,94	100,00	100,00	-2,32	-2,37	0,00	-0,18
8,00	1,81	0,00	40,94	39,93	100,00	100,00	-2,37	-2,43	0,00	-0,15
9,00	2,01	0,00	39,93	38,94	100,00	100,00	-2,43	-2,50	0,00	-0,11
10,00	2,21	0,00	38,94	37,98	100,00	100,00	-2,50	-2,56	0,00	-0,08
11,00	2,40	0,00	37,98	37,04	100,00	100,00	-2,56	-2,62	0,00	-0,05
12,00	2,59	5,00	37,04	37,36	100,00	98,75	-2,62	-2,43	3,24	0,05
13,00	2,53	5,00	37,36	37,67	98,75	97,50	-2,43	-2,24	6,40	0,08
14,00	2,47	5,00	37,67	37,98	97,50	96,25	-2,24	-2,04	9,48	0,11
15,00	2,40	5,00	37,98	38,27	96,25	95,00	-2,04	-1,84	12,49	0,15
16,00	2,35	5,00	38,27	38,56	95,00	93,75	-1,84	-1,63	15,42	0,18
17,00	2,29	5,00	38,56	38,85	93,75	92,50	-1,63	-1,41	18,28	0,22
18,00	2,23	5,00	38,85	39,12	92,50	91,25	-1,41	-1,19	21,07	0,26
19,00	2,18	5,00	39,12	39,39	91,25	90,00	-1,19	-0,96	23,79	0,31
20,00	2,12	5,00	39,39	39,65	90,00	88,75	-0,96	-0,73	26,44	0,35
21,00	2,07	5,00	39,65	39,91	88,75	87,50	-0,73	-0,49	29,03	0,40
22,00	2,02	5,00	39,91	40,16	87,50	86,25	-0,49	-0,25	31,55	0,44
23,00	1,97	5,00	40,16	40,40	86,25	85,00	-0,25	0,00	34,01	0,49

Seguidament es dibuixa una representació gràfica de les tres simulacions.

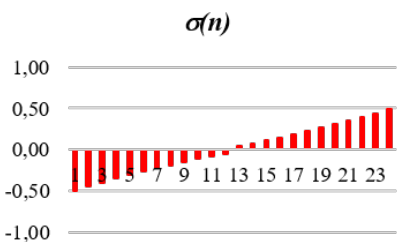
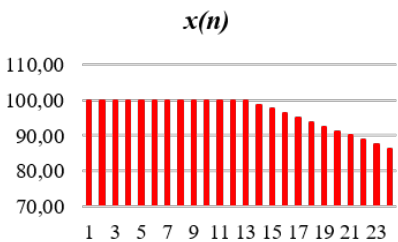
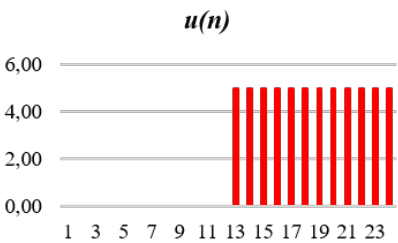
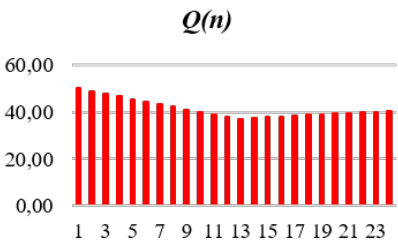
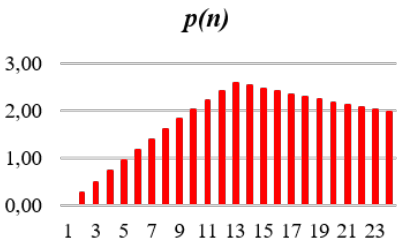
T
Cas 1



T/2
Cas 9



T/4
Cas 17



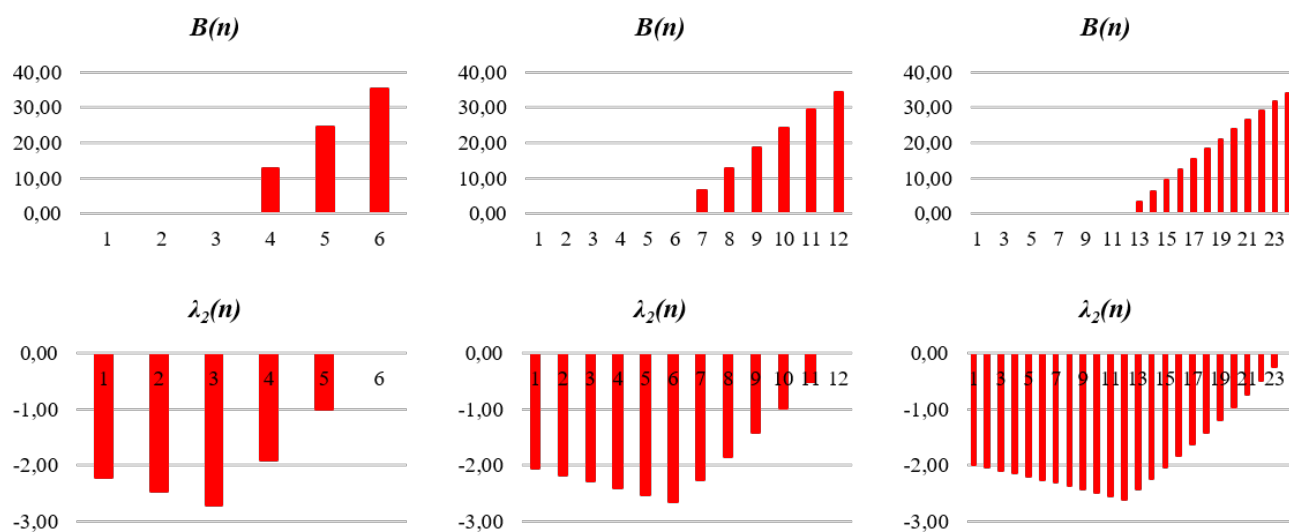


Figura 20: Representació gràfica simulació casos 1, 9 i 17

Ara es té en compte **N=30**. Les taules de sota mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 12: *Simulacions en condicions 1 per N=30 i T=1. CAS 5*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	45,24	100,00	100,00	-2,90	-3,20	0,00	-3,05
1,00	0,95	0,00	45,24	40,94	100,00	100,00	-3,20	-3,54	0,00	-2,42
2,00	1,81	0,00	40,94	37,04	100,00	100,00	-3,54	-3,91	0,00	-1,91
3,00	2,59	0,00	37,04	33,52	100,00	100,00	-3,91	-4,32	0,00	-1,52
4,00	3,30	0,00	33,52	30,33	100,00	100,00	-4,32	-4,78	0,00	-1,25
5,00	3,93	0,00	30,33	27,44	100,00	100,00	-4,78	-5,28	0,00	-1,09
6,00	4,51	5,00	27,44	29,59	100,00	95,00	-5,28	-4,73	22,56	0,01
7,00	4,08	0,00	29,59	26,77	95,00	95,00	-4,73	-5,23	22,56	-0,89
8,00	4,65	0,00	26,77	24,22	95,00	95,00	-5,23	-5,78	22,56	-0,85
9,00	5,16	5,00	24,22	26,68	95,00	90,00	-5,78	-5,28	48,34	0,13
10,00	4,66	5,00	26,68	28,90	90,00	85,00	-5,28	-4,73	71,66	0,17
11,00	4,22	5,00	28,90	30,90	85,00	80,00	-4,73	-4,12	92,76	0,30
12,00	3,82	0,00	30,90	27,96	80,00	80,00	-4,12	-4,55	92,76	-0,51
13,00	4,41	0,00	27,96	25,30	80,00	80,00	-4,55	-5,03	92,76	-0,38
14,00	4,94	0,00	25,30	22,89	80,00	80,00	-5,03	-5,56	92,76	-0,35
15,00	5,42	0,00	22,89	20,72	80,00	80,00	-5,56	-6,15	92,76	-0,43
16,00	5,86	5,00	20,72	23,50	80,00	75,00	-6,15	-5,69	122,05	0,44
17,00	5,30	5,00	23,50	26,02	75,00	70,00	-5,69	-5,18	148,54	0,37
18,00	4,80	5,00	26,02	28,31	70,00	65,00	-5,18	-4,62	172,52	0,40
19,00	4,34	0,00	28,31	25,61	65,00	65,00	-4,62	-5,11	172,52	-0,52
20,00	4,88	0,00	25,61	23,17	65,00	65,00	-5,11	-5,64	172,52	-0,49
21,00	5,37	0,00	23,17	20,97	65,00	65,00	-5,64	-6,24	172,52	-0,57
22,00	5,81	5,00	20,97	23,73	65,00	60,00	-6,24	-5,79	201,55	0,30
23,00	5,25	5,00	23,73	26,23	60,00	55,00	-5,79	-5,29	227,82	0,22
24,00	4,75	5,00	26,23	28,49	55,00	50,00	-5,29	-4,74	251,58	0,24
25,00	4,30	5,00	28,49	30,54	50,00	45,00	-4,74	-4,13	273,09	0,37
26,00	3,89	5,00	30,54	32,39	45,00	40,00	-4,13	-3,46	292,55	0,60
27,00	3,52	5,00	32,39	34,07	40,00	35,00	-3,46	-2,72	310,16	0,93
28,00	3,19	5,00	34,07	35,58	35,00	30,00	-2,72	-1,90	326,09	1,37
29,00	2,88	5,00	35,58	36,96	30,00	25,00	-1,90	-1,00	340,51	1,93
30,00	2,61	5,00	36,96	38,20	25,00	20,00	-1,00	0,00	353,55	2,61

Taula 13: Simulacions en condicions 1 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 13

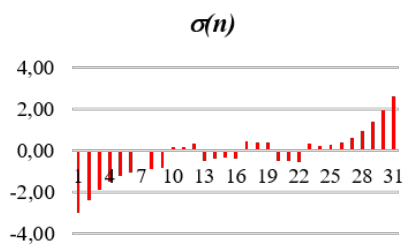
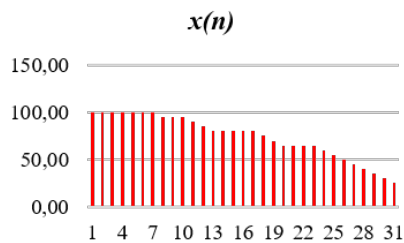
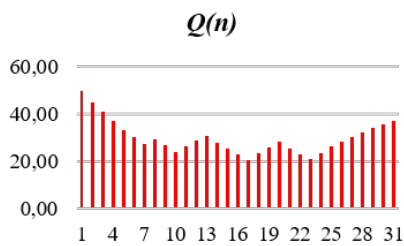
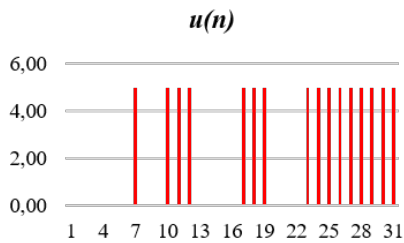
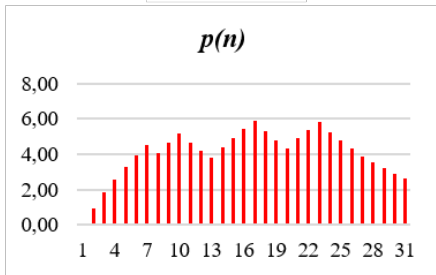
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	47,56	100,00	100,00	-2,53	-2,66	0,00	-1,30
1,00	0,49	0,00	47,56	45,24	100,00	100,00	-2,66	-2,79	0,00	-1,12
2,00	0,95	0,00	45,24	43,04	100,00	100,00	-2,79	-2,94	0,00	-0,96
3,00	1,39	0,00	43,04	40,94	100,00	100,00	-2,94	-3,09	0,00	-0,81
4,00	1,81	0,00	40,94	38,94	100,00	100,00	-3,09	-3,25	0,00	-0,68
5,00	2,21	0,00	38,94	37,04	100,00	100,00	-3,25	-3,41	0,00	-0,56
6,00	2,59	0,00	37,04	35,23	100,00	100,00	-3,41	-3,59	0,00	-0,45
7,00	2,95	0,00	35,23	33,52	100,00	100,00	-3,59	-3,77	0,00	-0,36
8,00	3,30	0,00	33,52	31,88	100,00	100,00	-3,77	-3,96	0,00	-0,29
9,00	3,62	0,00	31,88	30,33	100,00	100,00	-3,96	-4,17	0,00	-0,22
10,00	3,93	0,00	30,33	28,85	100,00	100,00	-4,17	-4,38	0,00	-0,17
11,00	4,23	0,00	28,85	27,44	100,00	100,00	-4,38	-4,61	0,00	-0,13
12,00	4,51	0,00	27,44	26,10	100,00	100,00	-4,61	-4,84	0,00	-0,11
13,00	4,78	0,00	26,10	24,83	100,00	100,00	-4,84	-5,09	0,00	-0,09
14,00	5,03	0,00	24,83	23,62	100,00	100,00	-5,09	-5,35	0,00	-0,09
15,00	5,28	0,00	23,62	22,47	100,00	100,00	-5,35	-5,63	0,00	-0,11
16,00	5,51	5,00	22,47	23,81	100,00	97,50	-5,63	-5,39	13,77	0,13
17,00	5,24	5,00	23,81	25,09	97,50	95,00	-5,39	-5,14	26,86	0,11
18,00	4,98	5,00	25,09	26,30	95,00	92,50	-5,14	-4,88	39,32	0,11
19,00	4,74	0,00	26,30	25,02	92,50	92,50	-4,88	-5,13	39,32	-0,13
20,00	5,00	0,00	25,02	23,80	92,50	92,50	-5,13	-5,39	39,32	-0,13
21,00	5,24	0,00	23,80	22,64	92,50	92,50	-5,39	-5,67	39,32	-0,14
22,00	5,47	5,00	22,64	23,97	92,50	90,00	-5,67	-5,43	53,00	0,09
23,00	5,21	5,00	23,97	25,24	90,00	87,50	-5,43	-5,18	66,01	0,07
24,00	4,95	5,00	25,24	26,45	87,50	85,00	-5,18	-4,92	78,39	0,07
25,00	4,71	5,00	26,45	27,60	85,00	82,50	-4,92	-4,65	90,17	0,09
26,00	4,48	0,00	27,60	26,25	82,50	82,50	-4,65	-4,89	90,17	-0,14
27,00	4,75	0,00	26,25	24,97	82,50	82,50	-4,89	-5,14	90,17	-0,13
28,00	5,01	0,00	24,97	23,75	82,50	82,50	-5,14	-5,40	90,17	-0,13
29,00	5,25	0,00	23,75	22,60	82,50	82,50	-5,40	-5,68	90,17	-0,15
30,00	5,48	0,00	22,60	21,49	82,50	82,50	-5,68	-5,97	90,17	-0,17
31,00	5,70	5,00	21,49	22,88	82,50	80,00	-5,97	-5,75	104,42	0,04
32,00	5,42	5,00	22,88	24,21	80,00	77,50	-5,75	-5,52	117,98	0,02
33,00	5,16	5,00	24,21	25,46	77,50	75,00	-5,52	-5,28	130,88	0,00
34,00	4,91	5,00	25,46	26,66	75,00	72,50	-5,28	-5,02	143,14	0,00
35,00	4,67	0,00	26,66	25,36	72,50	72,50	-5,02	-5,28	143,14	-0,24
36,00	4,93	5,00	25,36	26,56	72,50	70,00	-5,28	-5,03	155,46	0,01
37,00	4,69	5,00	26,56	27,71	70,00	67,50	-5,03	-4,76	167,18	0,02
38,00	4,46	5,00	27,71	28,79	67,50	65,00	-4,76	-4,48	178,33	0,05
39,00	4,24	5,00	28,79	29,83	65,00	62,50	-4,48	-4,18	188,93	0,08
40,00	4,03	0,00	29,83	28,37	62,50	62,50	-4,18	-4,40	188,93	-0,13
41,00	4,33	0,00	28,37	26,99	62,50	62,50	-4,40	-4,62	188,93	-0,09
42,00	4,60	0,00	26,99	25,67	62,50	62,50	-4,62	-4,86	188,93	-0,07
43,00	4,87	0,00	25,67	24,42	62,50	62,50	-4,86	-5,11	188,93	-0,06
44,00	5,12	0,00	24,42	23,23	62,50	62,50	-5,11	-5,37	188,93	-0,06
45,00	5,35	0,00	23,23	22,10	62,50	62,50	-5,37	-5,65	188,93	-0,08
46,00	5,58	5,00	22,10	23,46	62,50	60,00	-5,65	-5,41	202,89	0,15
47,00	5,31	5,00	23,46	24,75	60,00	57,50	-5,41	-5,16	216,16	0,14
48,00	5,05	5,00	24,75	25,98	57,50	55,00	-5,16	-4,90	228,78	0,14
49,00	4,80	5,00	25,98	27,15	55,00	52,50	-4,90	-4,63	240,79	0,15
50,00	4,57	5,00	27,15	28,27	52,50	50,00	-4,63	-4,34	252,21	0,17
51,00	4,35	5,00	28,27	29,33	50,00	47,50	-4,34	-4,03	263,08	0,21
52,00	4,13	5,00	29,33	30,34	47,50	45,00	-4,03	-3,72	273,41	0,26
53,00	3,93	5,00	30,34	31,30	45,00	42,50	-3,72	-3,38	283,25	0,32
54,00	3,74	5,00	31,30	32,21	42,50	40,00	-3,38	-3,03	292,60	0,39
55,00	3,56	5,00	32,21	33,08	40,00	37,50	-3,03	-2,66	301,49	0,48
56,00	3,38	5,00	33,08	33,90	37,50	35,00	-2,66	-2,27	309,96	0,59
57,00	3,22	5,00	33,90	34,69	35,00	32,50	-2,27	-1,86	318,01	0,70
58,00	3,06	5,00	34,69	35,43	32,50	30,00	-1,86	-1,43	325,66	0,83
59,00	2,91	5,00	35,43	36,14	30,00	27,50	-1,43	-0,98	332,95	0,98
60,00	2,77	5,00	36,14	36,82	27,50	25,00	-0,98	-0,50	339,88	1,14
61,00	2,64	5,00	36,82	37,46	25,00	22,50	-0,50	0,00	346,47	1,32

Taula 14: Simulacions en condicions 1 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 21

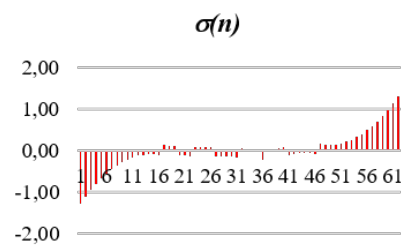
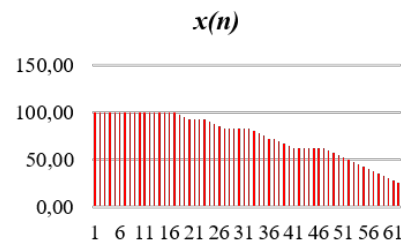
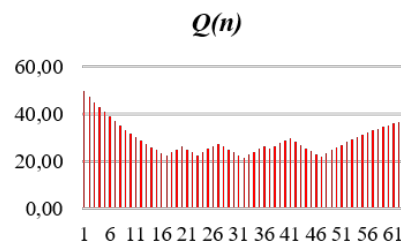
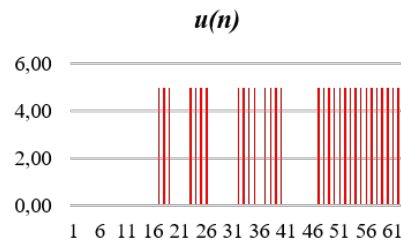
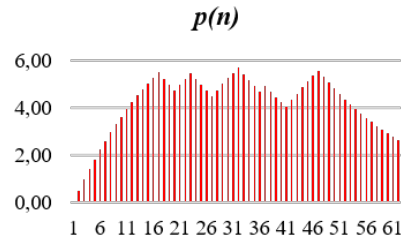
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	8,82	100,00	100,00	-2,54	-2,88	0,00	-0,68
1,00	1,18	0,00	8,82	7,79	100,00	100,00	-2,88	-3,26	0,00	-0,47
2,00	2,21	0,00	7,79	6,87	100,00	100,00	-3,26	-3,69	0,00	-0,31
3,00	3,13	0,00	6,87	6,07	100,00	100,00	-3,69	-4,18	0,00	-0,20
4,00	3,93	0,00	6,07	5,35	100,00	100,00	-4,18	-4,74	0,00	-0,13
5,00	4,65	0,00	5,35	4,72	100,00	100,00	-4,74	-5,37	0,00	-0,10
6,00	5,28	0,00	4,72	4,17	100,00	100,00	-5,37	-6,09	0,00	-0,11
7,00	5,83	5,00	4,17	4,85	100,00	98,75	-6,09	-5,48	7,29	0,17
8,00	5,15	5,00	4,85	5,46	98,75	97,50	-5,48	-4,80	13,72	0,16
9,00	4,54	5,00	5,46	5,99	97,50	96,25	-4,80	-4,02	19,40	0,19
10,00	4,01	0,00	5,99	5,29	96,25	96,25	-4,02	-4,55	19,40	-0,07
11,00	4,71	0,00	5,29	4,67	96,25	96,25	-4,55	-5,16	19,40	-0,03
12,00	5,33	0,00	4,67	4,12	96,25	96,25	-5,16	-5,85	19,40	-0,04
13,00	5,88	0,00	4,12	3,63	96,25	96,25	-5,85	-6,62	19,40	-0,09
14,00	6,37	5,00	3,63	4,38	96,25	95,00	-6,62	-6,09	27,36	0,16
15,00	5,62	5,00	4,38	5,04	95,00	93,75	-6,09	-5,48	34,38	0,12
16,00	4,96	5,00	5,04	5,63	93,75	92,50	-5,48	-4,80	40,57	0,11
17,00	4,37	5,00	5,63	6,14	92,50	91,25	-4,80	-4,02	46,04	0,15
18,00	3,86	0,00	6,14	5,42	91,25	91,25	-4,02	-4,56	46,04	-0,11
19,00	4,58	0,00	5,42	4,78	91,25	91,25	-4,56	-5,16	46,04	-0,07
20,00	5,22	0,00	4,78	4,22	91,25	91,25	-5,16	-5,85	46,04	-0,07
21,00	5,78	0,00	4,22	3,72	91,25	91,25	-5,85	-6,63	46,04	-0,11
22,00	6,28	5,00	3,72	4,46	91,25	90,00	-6,63	-6,09	53,89	0,14
23,00	5,54	5,00	4,46	5,11	90,00	88,75	-6,09	-5,49	60,81	0,09
24,00	4,89	5,00	5,11	5,69	88,75	87,50	-5,49	-4,80	66,92	0,09
25,00	4,31	5,00	5,69	6,19	87,50	86,25	-4,80	-4,03	72,31	0,13
26,00	3,81	0,00	6,19	5,47	86,25	86,25	-4,03	-4,56	72,31	-0,12
27,00	4,53	0,00	5,47	4,82	86,25	86,25	-4,56	-5,17	72,31	-0,08
28,00	5,18	0,00	4,82	4,26	86,25	86,25	-5,17	-5,86	72,31	-0,08
29,00	5,74	0,00	4,26	3,76	86,25	86,25	-5,86	-6,64	72,31	-0,12
30,00	6,24	5,00	3,76	4,49	86,25	85,00	-6,64	-6,11	80,12	0,13
31,00	5,51	5,00	4,49	5,14	85,00	83,75	-6,11	-5,50	87,01	0,08
32,00	4,86	5,00	5,14	5,71	83,75	82,50	-5,50	-4,82	93,09	0,08
33,00	4,29	5,00	5,71	6,21	82,50	81,25	-4,82	-4,05	98,45	0,12
34,00	3,79	0,00	6,21	5,48	81,25	81,25	-4,05	-4,59	98,45	-0,13
35,00	4,52	0,00	5,48	4,84	81,25	81,25	-4,59	-5,20	98,45	-0,09
36,00	5,16	0,00	4,84	4,27	81,25	81,25	-5,20	-5,89	98,45	-0,09
37,00	5,73	0,00	4,27	3,77	81,25	81,25	-5,89	-6,67	98,45	-0,14
38,00	6,23	5,00	3,77	4,50	81,25	80,00	-6,67	-6,14	106,24	0,11
39,00	5,50	5,00	4,50	5,15	80,00	78,75	-6,14	-5,54	113,11	0,07
40,00	4,85	5,00	5,15	5,72	78,75	77,50	-5,54	-4,87	119,18	0,07
41,00	4,28	0,00	5,72	5,05	77,50	77,50	-4,87	-5,51	119,18	-0,23
42,00	4,95	5,00	5,05	5,63	77,50	76,25	-5,51	-4,83	125,37	0,10
43,00	4,37	0,00	5,63	4,97	76,25	76,25	-4,83	-5,48	125,37	-0,19
44,00	5,03	5,00	4,97	5,56	76,25	75,00	-5,48	-4,79	131,67	0,13
45,00	4,44	0,00	5,56	4,90	75,00	75,00	-4,79	-5,43	131,67	-0,16
46,00	5,10	5,00	4,90	5,50	75,00	73,75	-5,43	-4,73	138,03	0,16
47,00	4,50	0,00	5,50	4,86	73,75	73,75	-4,73	-5,36	138,03	-0,14
48,00	5,14	5,00	4,86	5,46	73,75	72,50	-5,36	-4,66	144,46	0,19
49,00	4,54	0,00	5,46	4,82	72,50	72,50	-4,66	-5,28	144,46	-0,11
50,00	5,18	0,00	4,82	4,25	72,50	72,50	-5,28	-5,98	144,46	-0,11
51,00	5,75	5,00	4,25	4,93	72,50	71,25	-5,98	-5,36	151,65	0,18
52,00	5,07	0,00	4,93	4,35	71,25	71,25	-5,36	-6,08	151,65	-0,16
53,00	5,65	5,00	4,35	5,01	71,25	70,00	-6,08	-5,47	158,71	0,13
54,00	4,99	0,00	5,01	4,42	70,00	70,00	-5,47	-6,20	158,71	-0,21
55,00	5,58	5,00	4,42	5,08	70,00	68,75	-6,20	-5,61	165,68	0,08
56,00	4,92	5,00	5,08	5,66	68,75	67,50	-5,61	-4,94	171,83	0,07
57,00	4,34	0,00	5,66	4,99	67,50	67,50	-4,94	-5,59	171,83	-0,23
58,00	5,01	5,00	4,99	5,58	67,50	66,25	-5,59	-4,92	178,09	0,10
59,00	4,42	0,00	5,58	4,93	66,25	66,25	-4,92	-5,58	178,09	-0,21
60,00	5,07	5,00	4,93	5,52	66,25	65,00	-5,58	-4,90	184,43	0,12
61,00	4,48	0,00	5,52	4,87	65,00	65,00	-4,90	-5,56	184,43	-0,19
62,00	5,13	5,00	4,87	5,48	65,00	63,75	-5,56	-4,88	190,84	0,14

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
63,00	4,52	5,00	5,48	6,01	63,75	62,50	-4,88	-4,11	196,50	0,16
64,00	3,99	0,00	6,01	5,30	62,50	62,50	-4,11	-4,66	196,50	-0,10
65,00	4,70	0,00	5,30	4,68	62,50	62,50	-4,66	-5,28	196,50	-0,07
66,00	5,32	5,00	4,68	5,30	62,50	61,25	-5,28	-4,57	203,15	0,26
67,00	4,70	0,00	5,30	4,68	61,25	61,25	-4,57	-5,18	203,15	-0,04
68,00	5,32	5,00	4,68	5,31	61,25	60,00	-5,18	-4,45	209,80	0,28
69,00	4,69	0,00	5,31	4,68	60,00	60,00	-4,45	-5,04	209,80	-0,01
70,00	5,32	0,00	4,68	4,13	60,00	60,00	-5,04	-5,71	209,80	-0,01
71,00	5,87	5,00	4,13	4,82	60,00	58,75	-5,71	-5,06	217,14	0,28
72,00	5,18	0,00	4,82	4,25	58,75	58,75	-5,06	-5,73	217,14	-0,05
73,00	5,75	5,00	4,25	4,93	58,75	57,50	-5,73	-5,07	224,32	0,24
74,00	5,07	0,00	4,93	4,35	57,50	57,50	-5,07	-5,75	224,32	-0,08
75,00	5,65	5,00	4,35	5,01	57,50	56,25	-5,75	-5,10	231,38	0,21
76,00	4,99	0,00	5,01	4,43	56,25	56,25	-5,10	-5,78	231,38	-0,11
77,00	5,57	5,00	4,43	5,08	56,25	55,00	-5,78	-5,13	238,35	0,19
78,00	4,92	0,00	5,08	4,48	55,00	55,00	-5,13	-5,81	238,35	-0,14
79,00	5,52	5,00	4,48	5,13	55,00	53,75	-5,81	-5,17	245,24	0,16
80,00	4,87	0,00	5,13	4,53	53,75	53,75	-5,17	-5,86	245,24	-0,16
81,00	5,47	5,00	4,53	5,17	53,75	52,50	-5,86	-5,22	252,08	0,14
82,00	4,83	0,00	5,17	4,56	52,50	52,50	-5,22	-5,92	252,08	-0,18
83,00	5,44	5,00	4,56	5,20	52,50	51,25	-5,92	-5,29	258,88	0,12
84,00	4,80	0,00	5,20	4,59	51,25	51,25	-5,29	-6,00	258,88	-0,21
85,00	5,41	5,00	4,59	5,23	51,25	50,00	-6,00	-5,38	265,64	0,09
86,00	4,77	0,00	5,23	4,61	50,00	50,00	-5,38	-6,10	265,64	-0,24
87,00	5,39	5,00	4,61	5,25	50,00	48,75	-6,10	-5,49	272,37	0,06
88,00	4,75	5,00	5,25	5,80	48,75	47,50	-5,49	-4,81	278,31	0,06
89,00	4,20	5,00	5,80	6,30	47,50	46,25	-4,81	-4,03	283,56	0,10
90,00	3,70	0,00	6,30	5,56	46,25	46,25	-4,03	-4,56	283,56	-0,15
91,00	4,44	0,00	5,56	4,90	46,25	46,25	-4,56	-5,17	283,56	-0,10
92,00	5,10	0,00	4,90	4,33	46,25	46,25	-5,17	-5,86	283,56	-0,10
93,00	5,67	0,00	4,33	3,82	46,25	46,25	-5,86	-6,64	283,56	-0,14
94,00	6,18	5,00	3,82	4,55	46,25	45,00	-6,64	-6,11	291,29	0,11
95,00	5,45	5,00	4,55	5,19	45,00	43,75	-6,11	-5,51	298,10	0,07
96,00	4,81	5,00	5,19	5,75	43,75	42,50	-5,51	-4,82	304,12	0,07
97,00	4,25	5,00	5,75	6,25	42,50	41,25	-4,82	-4,05	309,43	0,11
98,00	3,75	0,00	6,25	5,52	41,25	41,25	-4,05	-4,59	309,43	-0,14
99,00	4,48	0,00	5,52	4,87	41,25	41,25	-4,59	-5,20	309,43	-0,10
100,00	5,13	0,00	4,87	4,30	41,25	41,25	-5,20	-5,89	309,43	-0,10
101,00	5,70	0,00	4,30	3,79	41,25	41,25	-5,89	-6,68	309,43	-0,14
102,00	6,21	5,00	3,79	4,52	41,25	40,00	-6,68	-6,15	317,19	0,11
103,00	5,48	5,00	4,52	5,16	40,00	38,75	-6,15	-5,55	324,04	0,06
104,00	4,84	5,00	5,16	5,73	38,75	37,50	-5,55	-4,87	330,08	0,06
105,00	4,27	5,00	5,73	6,23	37,50	36,25	-4,87	-4,11	335,42	0,10
106,00	3,77	0,00	6,23	5,50	36,25	36,25	-4,11	-4,65	335,42	-0,15
107,00	4,50	0,00	5,50	4,86	36,25	36,25	-4,65	-5,27	335,42	-0,11
108,00	5,14	0,00	4,86	4,28	36,25	36,25	-5,27	-5,98	335,42	-0,12
109,00	5,72	0,00	4,28	3,78	36,25	36,25	-5,98	-6,77	335,42	-0,16
110,00	6,22	5,00	3,78	4,51	36,25	35,00	-6,77	-6,26	343,19	0,08
111,00	5,49	5,00	4,51	5,16	35,00	33,75	-6,26	-5,67	350,05	0,04
112,00	4,84	5,00	5,16	5,73	33,75	32,50	-5,67	-5,01	356,10	0,03
113,00	4,27	5,00	5,73	6,23	32,50	31,25	-5,01	-4,26	361,45	0,07
114,00	3,77	0,00	6,23	5,50	31,25	31,25	-4,26	-4,83	361,45	-0,19
115,00	4,50	0,00	5,50	4,85	31,25	31,25	-4,83	-5,47	361,45	-0,16
116,00	5,15	0,00	4,85	4,28	31,25	31,25	-5,47	-6,20	361,45	-0,17
117,00	5,72	5,00	4,28	4,95	31,25	30,00	-6,20	-5,61	368,59	0,11
118,00	5,05	5,00	4,95	5,55	30,00	28,75	-5,61	-4,94	374,90	0,10
119,00	4,45	5,00	5,55	6,07	28,75	27,50	-4,94	-4,19	380,47	0,13
120,00	3,93	5,00	6,07	6,53	27,50	26,25	-4,19	-3,33	385,39	0,20
121,00	3,47	5,00	6,53	6,94	26,25	25,00	-3,33	-2,35	389,72	0,31
122,00	3,06	5,00	6,94	7,30	25,00	23,75	-2,35	-1,25	393,55	0,47
123,00	2,70	5,00	7,30	7,62	23,75	22,50	-1,25	0,00	396,93	0,68

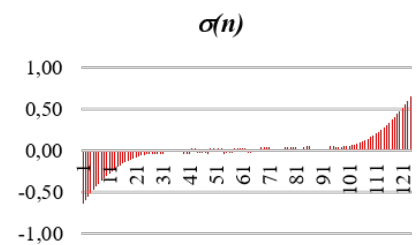
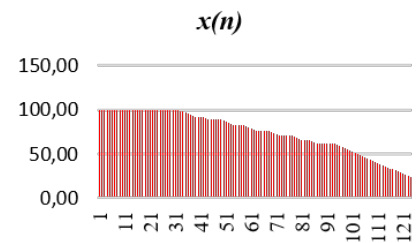
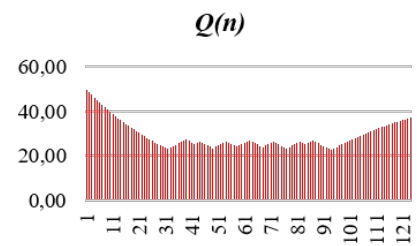
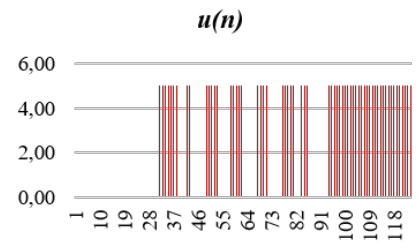
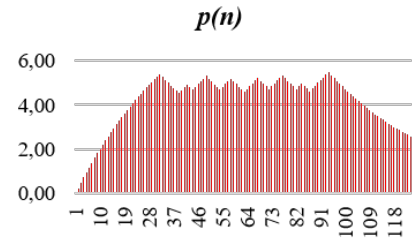
T
Cas 5



T/2
Cas 13



T/4
Cas 21



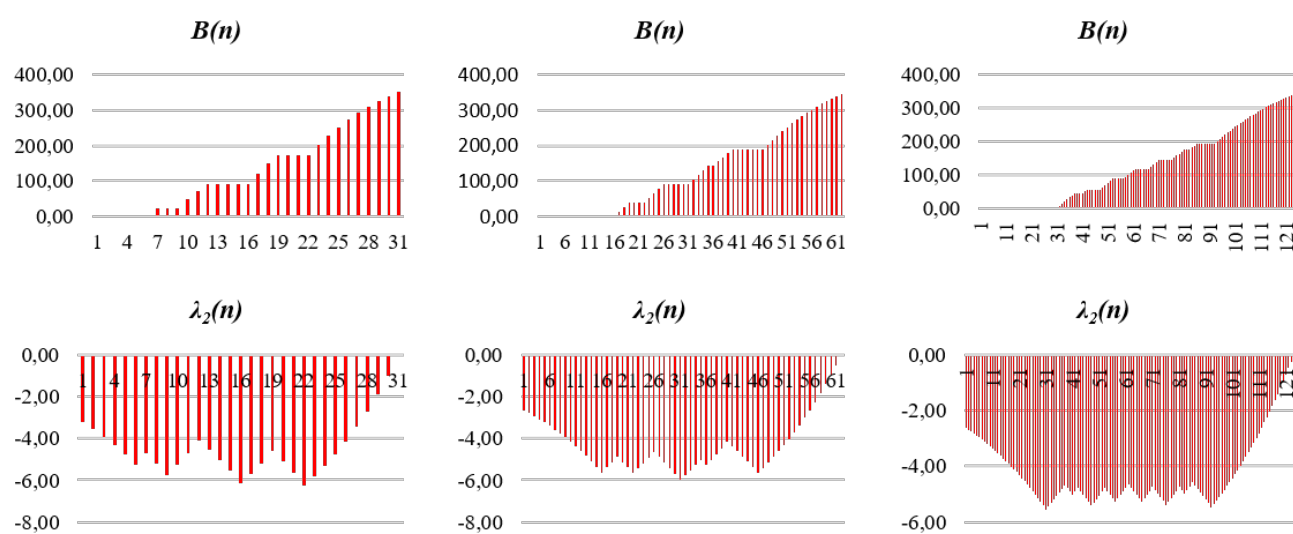


Figura 21: Representació gràfica simulació casos 5, 13 i 21

Condicions 2

En aquest apartat es mostren tant les simulacions com la representació gràfica d'aquestes per les **condicions 2** del problema.

x_0	p_m	u_m	ρ	Q_m	Q_0	m
100	10	5	0,5	0	10	1

Primer tenint en compte **N=5**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 15: *Simulacions en condicions 2 per N=5 i T=1. CAS 2*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	6,07	100,00	100,00	-2,20	-3,63	0,00	-2,86
1,00	3,93	0,00	6,07	3,68	100,00	100,00	-3,63	-5,99	0,00	-0,78
2,00	6,32	0,00	3,68	2,23	100,00	100,00	-5,99	-9,87	0,00	-1,45
3,00	7,77	5,00	2,23	5,29	100,00	95,00	-9,87	-8,03	38,84	1,45
4,00	4,71	5,00	5,29	7,14	95,00	90,00	-8,03	-5,00	62,40	0,78
5,00	2,86	5,00	7,14	8,27	90,00	85,00	-5,00	0,00	76,69	2,86

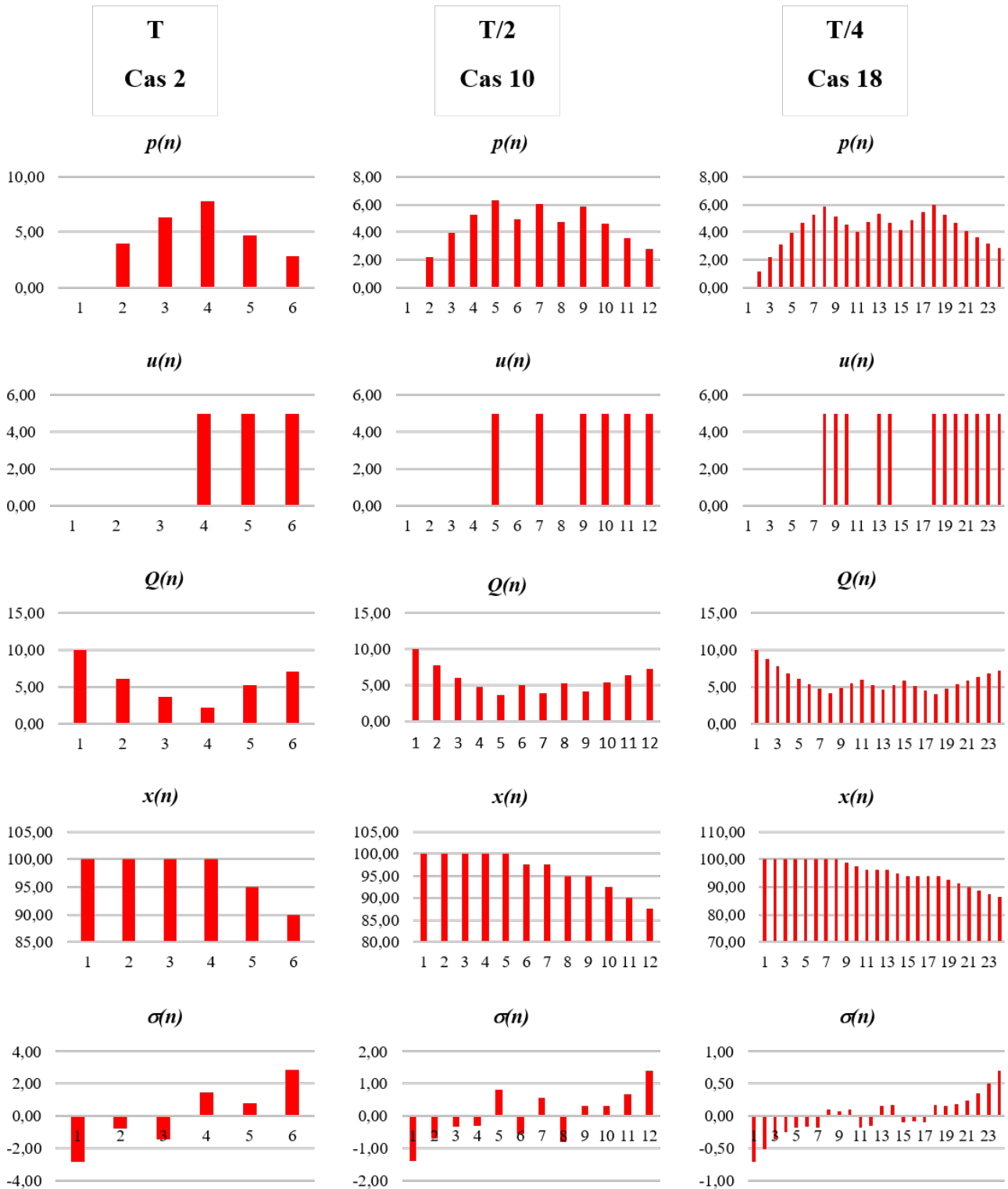
Taula 16: *Simulacions en condicions 2 per N=5 i T=0,5. CAS 10*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	7,79	100,00	100,00	-2,44	-3,14	0,00	-1,39
1,00	2,21	0,00	7,79	6,07	100,00	100,00	-3,14	-4,03	0,00	-0,68
2,00	3,93	0,00	6,07	4,72	100,00	100,00	-4,03	-5,17	0,00	-0,32
3,00	5,28	0,00	4,72	3,68	100,00	100,00	-5,17	-6,64	0,00	-0,30
4,00	6,32	5,00	3,68	5,08	100,00	97,50	-6,64	-5,32	15,80	0,81
5,00	4,92	0,00	5,08	3,95	97,50	97,50	-5,32	-6,83	15,80	-0,56
6,00	6,05	5,00	3,95	5,29	97,50	95,00	-6,83	-5,56	30,92	0,56
7,00	4,71	0,00	5,29	4,12	95,00	95,00	-5,56	-7,14	30,92	-0,81
8,00	5,88	5,00	4,12	5,42	95,00	92,50	-7,14	-5,96	45,62	0,30
9,00	4,58	5,00	5,42	6,43	92,50	90,00	-5,96	-4,45	57,06	0,32
10,00	3,57	5,00	6,43	7,22	90,00	87,50	-4,45	-2,50	65,98	0,68
11,00	2,78	5,00	7,22	7,84	87,50	85,00	-2,50	0,00	72,92	1,39

Taula 17: Simulacions en condicions 2 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 18

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	8,82	100,00	100,00	-2,65	-3,01	0,00	-0,71
1,00	1,18	0,00	8,82	7,79	100,00	100,00	-3,01	-3,41	0,00	-0,51
2,00	2,21	0,00	7,79	6,87	100,00	100,00	-3,41	-3,86	0,00	-0,35
3,00	3,13	0,00	6,87	6,07	100,00	100,00	-3,86	-4,37	0,00	-0,25
4,00	3,93	0,00	6,07	5,35	100,00	100,00	-4,37	-4,96	0,00	-0,18
5,00	4,65	0,00	5,35	4,72	100,00	100,00	-4,96	-5,62	0,00	-0,16
6,00	5,28	0,00	4,72	4,17	100,00	100,00	-5,62	-6,36	0,00	-0,18
7,00	5,83	5,00	4,17	4,85	100,00	98,75	-6,36	-5,79	7,29	0,10
8,00	5,15	5,00	4,85	5,46	98,75	97,50	-5,79	-5,15	13,72	0,08
9,00	4,54	5,00	5,46	5,99	97,50	96,25	-5,15	-4,42	19,40	0,10
10,00	4,01	0,00	5,99	5,29	96,25	96,25	-4,42	-5,01	19,40	-0,17
11,00	4,71	0,00	5,29	4,67	96,25	96,25	-5,01	-5,67	19,40	-0,16
12,00	5,33	5,00	4,67	5,29	96,25	95,00	-5,67	-5,01	26,07	0,16
13,00	4,71	5,00	5,29	5,85	95,00	93,75	-5,01	-4,26	31,95	0,17
14,00	4,15	0,00	5,85	5,16	93,75	93,75	-4,26	-4,83	31,95	-0,10
15,00	4,84	0,00	5,16	4,55	93,75	93,75	-4,83	-5,47	31,95	-0,08
16,00	5,45	0,00	4,55	4,02	93,75	93,75	-5,47	-6,20	31,95	-0,10
17,00	5,98	5,00	4,02	4,72	93,75	92,50	-6,20	-5,61	39,43	0,18
18,00	5,28	5,00	4,72	5,34	92,50	91,25	-5,61	-4,94	46,02	0,16
19,00	4,66	5,00	5,34	5,89	91,25	90,00	-4,94	-4,19	51,85	0,18
20,00	4,11	5,00	5,89	6,37	90,00	88,75	-4,19	-3,33	56,99	0,25
21,00	3,63	5,00	6,37	6,80	88,75	87,50	-3,33	-2,35	61,52	0,35
22,00	3,20	5,00	6,80	7,17	87,50	86,25	-2,35	-1,25	65,52	0,51
23,00	2,83	5,00	7,17	7,51	86,25	85,00	-1,25	0,00	69,06	0,71

A continuació es mostra una representació gràfica d'aquestes simulacions.



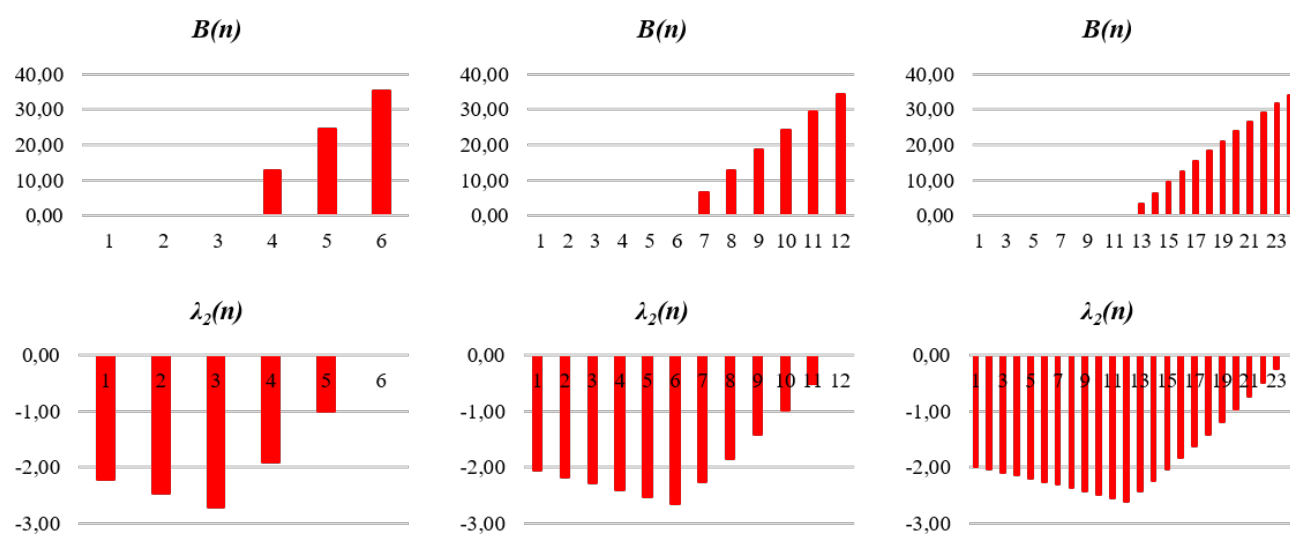


Figura 22: Representació gràfica simulació casos 2, 10 i 18

Ara es té en compte $N=30$. Les taules de sota mostren els resultats numèrics de les simulacions per a períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 18: Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=1$. CAS 6

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	6,07	100,00	100,00	-2,07	-3,42	0,00	-2,69
1,00	3,93	0,00	6,07	3,68	100,00	100,00	-3,42	-5,63	0,00	-0,50
2,00	6,32	0,00	3,68	2,23	100,00	100,00	-5,63	-9,29	0,00	-0,99
3,00	7,77	5,00	2,23	5,29	100,00	95,00	-9,29	-7,07	38,84	2,21
4,00	4,71	5,00	5,29	7,14	95,00	90,00	-7,07	-3,41	62,40	2,03
5,00	2,86	0,00	7,14	4,33	90,00	90,00	-3,41	-5,62	62,40	-1,57
6,00	5,67	0,00	4,33	2,63	90,00	90,00	-5,62	-9,27	62,40	-1,63
7,00	7,37	5,00	2,63	5,53	90,00	85,00	-9,27	-7,05	99,27	1,83
8,00	4,47	5,00	5,53	7,29	85,00	80,00	-7,05	-3,37	121,62	1,82
9,00	2,71	0,00	7,29	4,42	80,00	80,00	-3,37	-5,56	121,62	-1,67
10,00	5,58	0,00	4,42	2,68	80,00	80,00	-5,56	-9,17	121,62	-1,64
11,00	7,32	5,00	2,68	5,56	80,00	75,00	-9,17	-6,88	158,22	1,91
12,00	4,44	5,00	5,56	7,31	75,00	70,00	-6,88	-3,10	180,42	2,00
13,00	2,69	0,00	7,31	4,43	70,00	70,00	-3,10	-5,10	180,42	-1,32
14,00	5,57	0,00	4,43	2,69	70,00	70,00	-5,10	-8,42	180,42	-1,06
15,00	7,31	5,00	2,69	5,57	70,00	65,00	-8,42	-5,63	216,97	2,88
16,00	4,43	0,00	5,57	3,38	65,00	65,00	-5,63	-9,29	216,97	-2,87
17,00	6,62	5,00	3,38	5,98	65,00	60,00	-9,29	-7,07	250,10	1,06
18,00	4,02	5,00	5,98	7,56	60,00	55,00	-7,07	-3,41	270,19	1,34
19,00	2,44	0,00	7,56	4,59	55,00	55,00	-3,41	-5,62	270,19	-1,99
20,00	5,41	0,00	4,59	2,78	55,00	55,00	-5,62	-9,27	270,19	-1,88
21,00	7,22	5,00	2,78	5,62	55,00	50,00	-9,27	-7,03	306,28	1,68
22,00	4,38	5,00	5,62	7,34	50,00	45,00	-7,03	-3,35	328,16	1,74
23,00	2,66	0,00	7,34	4,45	45,00	45,00	-3,35	-5,53	328,16	-1,70
24,00	5,55	0,00	4,45	2,70	45,00	45,00	-5,53	-9,12	328,16	-1,63
25,00	7,30	5,00	2,70	5,57	45,00	40,00	-9,12	-6,79	364,65	1,95
26,00	4,43	5,00	5,57	7,32	40,00	35,00	-6,79	-2,96	386,79	2,10
27,00	2,68	0,00	7,32	4,44	35,00	35,00	-2,96	-4,87	386,79	-1,15
28,00	5,56	0,00	4,44	2,69	35,00	35,00	-4,87	-8,03	386,79	-0,76
29,00	7,31	5,00	2,69	5,57	35,00	30,00	-8,03	-5,00	423,33	3,37
30,00	4,43	5,00	5,57	7,31	30,00	25,00	-5,00	0,00	445,50	4,43

Taula 19: Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 14

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	7,79	100,00	100,00	-2,89	-3,71	0,00	-1,64
1,00	2,21	0,00	7,79	6,07	100,00	100,00	-3,71	-4,77	0,00	-1,00
2,00	3,93	0,00	6,07	4,72	100,00	100,00	-4,77	-6,12	0,00	-0,74
3,00	5,28	5,00	4,72	5,89	100,00	97,50	-6,12	-4,65	13,19	0,58
4,00	4,11	0,00	5,89	4,59	97,50	97,50	-4,65	-5,98	13,19	-0,59
5,00	5,41	0,00	4,59	3,57	97,50	97,50	-5,98	-7,67	13,19	-0,69
6,00	6,43	5,00	3,57	4,99	97,50	95,00	-7,67	-6,64	29,26	0,27
7,00	5,01	5,00	4,99	6,10	95,00	92,50	-6,64	-5,32	41,77	0,15
8,00	3,90	5,00	6,10	6,96	92,50	90,00	-5,32	-3,62	51,52	0,35
9,00	3,04	0,00	6,96	5,42	90,00	90,00	-3,62	-4,65	51,52	-0,54
10,00	4,58	0,00	5,42	4,22	90,00	90,00	-4,65	-5,97	51,52	-0,35
11,00	5,78	0,00	4,22	3,29	90,00	90,00	-5,97	-7,66	51,52	-0,50
12,00	6,71	5,00	3,29	4,77	90,00	87,50	-7,66	-6,63	68,29	0,42
13,00	5,23	5,00	4,77	5,93	87,50	85,00	-6,63	-5,30	81,36	0,27
14,00	4,07	5,00	5,93	6,83	85,00	82,50	-5,30	-3,60	91,53	0,44
15,00	3,17	0,00	6,83	5,32	82,50	82,50	-3,60	-4,62	91,53	-0,46
16,00	4,68	0,00	5,32	4,14	82,50	82,50	-4,62	-5,93	91,53	-0,28
17,00	5,86	0,00	4,14	3,23	82,50	82,50	-5,93	-7,62	91,53	-0,44
18,00	6,77	5,00	3,23	4,72	82,50	80,00	-7,62	-6,57	108,47	0,48
19,00	5,28	5,00	4,72	5,89	80,00	77,50	-6,57	-5,23	121,66	0,33
20,00	4,11	5,00	5,89	6,80	77,50	75,00	-5,23	-3,50	131,93	0,51
21,00	3,20	0,00	6,80	5,30	75,00	75,00	-3,50	-4,50	131,93	-0,39
22,00	4,70	0,00	5,30	4,12	75,00	75,00	-4,50	-5,77	131,93	-0,20
23,00	5,88	0,00	4,12	3,21	75,00	75,00	-5,77	-7,41	131,93	-0,34
24,00	6,79	5,00	3,21	4,71	75,00	72,50	-7,41	-6,31	148,90	0,60
25,00	5,29	5,00	4,71	5,88	72,50	70,00	-6,31	-4,89	162,11	0,48
26,00	4,12	0,00	5,88	4,58	70,00	70,00	-4,89	-6,28	162,11	-0,72
27,00	5,42	5,00	4,58	5,78	70,00	67,50	-6,28	-4,85	175,66	0,56
28,00	4,22	0,00	5,78	4,50	67,50	67,50	-4,85	-6,23	175,66	-0,65
29,00	5,50	5,00	4,50	5,72	67,50	65,00	-6,23	-4,79	189,40	0,63
30,00	4,28	0,00	5,72	4,45	65,00	65,00	-4,79	-6,15	189,40	-0,58
31,00	5,55	5,00	4,45	5,68	65,00	62,50	-6,15	-4,69	203,27	0,70
32,00	4,32	0,00	5,68	4,42	62,50	62,50	-4,69	-6,02	203,27	-0,50
33,00	5,58	5,00	4,42	5,66	62,50	60,00	-6,02	-4,52	217,21	0,79
34,00	4,34	0,00	5,66	4,41	60,00	60,00	-4,52	-5,80	217,21	-0,39
35,00	5,59	0,00	4,41	3,43	60,00	60,00	-5,80	-7,44	217,21	-0,50
36,00	6,57	5,00	3,43	4,88	60,00	57,50	-7,44	-6,35	233,63	0,48
37,00	5,12	5,00	4,88	6,02	57,50	55,00	-6,35	-4,94	246,42	0,37
38,00	3,98	0,00	6,02	4,69	55,00	55,00	-4,94	-6,34	246,42	-0,81
39,00	5,31	5,00	4,69	5,86	55,00	52,50	-6,34	-4,94	259,71	0,47
40,00	4,14	0,00	5,86	4,56	52,50	52,50	-4,94	-6,34	259,71	-0,73
41,00	5,44	5,00	4,56	5,77	52,50	50,00	-6,34	-4,93	273,30	0,54
42,00	4,23	0,00	5,77	4,49	50,00	50,00	-4,93	-6,33	273,30	-0,68
43,00	5,51	5,00	4,49	5,71	50,00	47,50	-6,33	-4,92	287,07	0,58
44,00	4,29	0,00	5,71	4,45	47,50	47,50	-4,92	-6,31	287,07	-0,65
45,00	5,55	5,00	4,45	5,68	47,50	45,00	-6,31	-4,90	300,96	0,61
46,00	4,32	0,00	5,68	4,42	45,00	45,00	-4,90	-6,29	300,96	-0,62
47,00	5,58	5,00	4,42	5,65	45,00	42,50	-6,29	-4,87	314,91	0,64
48,00	4,35	0,00	5,65	4,40	42,50	42,50	-4,87	-6,25	314,91	-0,59
49,00	5,60	5,00	4,40	5,64	42,50	40,00	-6,25	-4,81	328,90	0,67
50,00	4,36	0,00	5,64	4,39	40,00	40,00	-4,81	-6,18	328,90	-0,55
51,00	5,61	5,00	4,39	5,63	40,00	37,50	-6,18	-4,72	342,91	0,71
52,00	4,37	0,00	5,63	4,39	37,50	37,50	-4,72	-6,06	342,91	-0,50
53,00	5,61	5,00	4,39	5,63	37,50	35,00	-6,06	-4,58	356,94	0,78
54,00	4,37	0,00	5,63	4,38	35,00	35,00	-4,58	-5,87	356,94	-0,41
55,00	5,62	5,00	4,38	5,63	35,00	32,50	-5,87	-4,33	370,98	0,89
56,00	4,37	0,00	5,63	4,38	32,50	32,50	-4,33	-5,56	370,98	-0,27
57,00	5,62	0,00	4,38	3,41	32,50	32,50	-5,56	-7,14	370,98	-0,35
58,00	6,59	5,00	3,41	4,87	32,50	30,00	-7,14	-5,96	387,45	0,66
59,00	5,13	5,00	4,87	6,00	30,00	27,50	-5,96	-4,45	400,28	0,60
60,00	4,00	5,00	6,00	6,89	27,50	25,00	-4,45	-2,50	410,27	0,89
61,00	3,11	5,00	6,89	7,58	25,00	22,50	-2,50	0,00	418,05	1,56

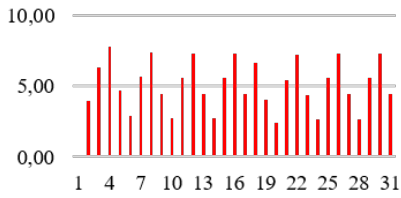
Taula 20: Simulacions en condicions 2 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 22

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	10,00	8,82	100,00	100,00	-2,54	-2,88	0,00	-0,68
1,00	1,18	0,00	8,82	7,79	100,00	100,00	-2,88	-3,26	0,00	-0,47
2,00	2,21	0,00	7,79	6,87	100,00	100,00	-3,26	-3,69	0,00	-0,31
3,00	3,13	0,00	6,87	6,07	100,00	100,00	-3,69	-4,18	0,00	-0,20
4,00	3,93	0,00	6,07	5,35	100,00	100,00	-4,18	-4,74	0,00	-0,13
5,00	4,65	0,00	5,35	4,72	100,00	100,00	-4,74	-5,37	0,00	-0,10
6,00	5,28	0,00	4,72	4,17	100,00	100,00	-5,37	-6,09	0,00	-0,11
7,00	5,83	5,00	4,17	4,85	100,00	98,75	-6,09	-5,48	7,29	0,17
8,00	5,15	5,00	4,85	5,46	98,75	97,50	-5,48	-4,80	13,72	0,16
9,00	4,54	5,00	5,46	5,99	97,50	96,25	-4,80	-4,02	19,40	0,19
10,00	4,01	0,00	5,99	5,29	96,25	96,25	-4,02	-4,55	19,40	-0,07
11,00	4,71	0,00	5,29	4,67	96,25	96,25	-4,55	-5,16	19,40	-0,03
12,00	5,33	0,00	4,67	4,12	96,25	96,25	-5,16	-5,85	19,40	-0,04
13,00	5,88	0,00	4,12	3,63	96,25	96,25	-5,85	-6,62	19,40	-0,09
14,00	6,37	5,00	3,63	4,38	96,25	95,00	-6,62	-6,09	27,36	0,16
15,00	5,62	5,00	4,38	5,04	95,00	93,75	-6,09	-5,48	34,38	0,12
16,00	4,96	5,00	5,04	5,63	93,75	92,50	-5,48	-4,80	40,57	0,11
17,00	4,37	5,00	5,63	6,14	92,50	91,25	-4,80	-4,02	46,04	0,15
18,00	3,86	0,00	6,14	5,42	91,25	91,25	-4,02	-4,56	46,04	-0,11
19,00	4,58	0,00	5,42	4,78	91,25	91,25	-4,56	-5,16	46,04	-0,07
20,00	5,22	0,00	4,78	4,22	91,25	91,25	-5,16	-5,85	46,04	-0,07
21,00	5,78	0,00	4,22	3,72	91,25	91,25	-5,85	-6,63	46,04	-0,11
22,00	6,28	5,00	3,72	4,46	91,25	90,00	-6,63	-6,09	53,89	0,14
23,00	5,54	5,00	4,46	5,11	90,00	88,75	-6,09	-5,49	60,81	0,09
24,00	4,89	5,00	5,11	5,69	88,75	87,50	-5,49	-4,80	66,92	0,09
25,00	4,31	5,00	5,69	6,19	87,50	86,25	-4,80	-4,03	72,31	0,13
26,00	3,81	0,00	6,19	5,47	86,25	86,25	-4,03	-4,56	72,31	-0,12
27,00	4,53	0,00	5,47	4,82	86,25	86,25	-4,56	-5,17	72,31	-0,08
28,00	5,18	0,00	4,82	4,26	86,25	86,25	-5,17	-5,86	72,31	-0,08
29,00	5,74	0,00	4,26	3,76	86,25	86,25	-5,86	-6,64	72,31	-0,12
30,00	6,24	5,00	3,76	4,49	86,25	85,00	-6,64	-6,11	80,12	0,13
31,00	5,51	5,00	4,49	5,14	85,00	83,75	-6,11	-5,50	87,01	0,08
32,00	4,86	5,00	5,14	5,71	83,75	82,50	-5,50	-4,82	93,09	0,08
33,00	4,29	5,00	5,71	6,21	82,50	81,25	-4,82	-4,05	98,45	0,12
34,00	3,79	0,00	6,21	5,48	81,25	81,25	-4,05	-4,59	98,45	-0,13
35,00	4,52	0,00	5,48	4,84	81,25	81,25	-4,59	-5,20	98,45	-0,09
36,00	5,16	0,00	4,84	4,27	81,25	81,25	-5,20	-5,89	98,45	-0,09
37,00	5,73	0,00	4,27	3,77	81,25	81,25	-5,89	-6,67	98,45	-0,14
38,00	6,23	5,00	3,77	4,50	81,25	80,00	-6,67	-6,14	106,24	0,11
39,00	5,50	5,00	4,50	5,15	80,00	78,75	-6,14	-5,54	113,11	0,07
40,00	4,85	5,00	5,15	5,72	78,75	77,50	-5,54	-4,87	119,18	0,07
41,00	4,28	0,00	5,72	5,05	77,50	77,50	-4,87	-5,51	119,18	-0,23
42,00	4,95	5,00	5,05	5,63	77,50	76,25	-5,51	-4,83	125,37	0,10
43,00	4,37	0,00	5,63	4,97	76,25	76,25	-4,83	-5,48	125,37	-0,19
44,00	5,03	5,00	4,97	5,56	76,25	75,00	-5,48	-4,79	131,67	0,13
45,00	4,44	0,00	5,56	4,90	75,00	75,00	-4,79	-5,43	131,67	-0,16
46,00	5,10	5,00	4,90	5,50	75,00	73,75	-5,43	-4,73	138,03	0,16
47,00	4,50	0,00	5,50	4,86	73,75	73,75	-4,73	-5,36	138,03	-0,14
48,00	5,14	5,00	4,86	5,46	73,75	72,50	-5,36	-4,66	144,46	0,19
49,00	4,54	0,00	5,46	4,82	72,50	72,50	-4,66	-5,28	144,46	-0,11
50,00	5,18	0,00	4,82	4,25	72,50	72,50	-5,28	-5,98	144,46	-0,11
51,00	5,75	5,00	4,25	4,93	72,50	71,25	-5,98	-5,36	151,65	0,18
52,00	5,07	0,00	4,93	4,35	71,25	71,25	-5,36	-6,08	151,65	-0,16
53,00	5,65	5,00	4,35	5,01	71,25	70,00	-6,08	-5,47	158,71	0,13
54,00	4,99	0,00	5,01	4,42	70,00	70,00	-5,47	-6,20	158,71	-0,21
55,00	5,58	5,00	4,42	5,08	70,00	68,75	-6,20	-5,61	165,68	0,08
56,00	4,92	5,00	5,08	5,66	68,75	67,50	-5,61	-4,94	171,83	0,07
57,00	4,34	0,00	5,66	4,99	67,50	67,50	-4,94	-5,59	171,83	-0,23
58,00	5,01	5,00	4,99	5,58	67,50	66,25	-5,59	-4,92	178,09	0,10
59,00	4,42	0,00	5,58	4,93	66,25	66,25	-4,92	-5,58	178,09	-0,21
60,00	5,07	5,00	4,93	5,52	66,25	65,00	-5,58	-4,90	184,43	0,12
61,00	4,48	0,00	5,52	4,87	65,00	65,00	-4,90	-5,56	184,43	-0,19
62,00	5,13	5,00	4,87	5,48	65,00	63,75	-5,56	-4,88	190,84	0,14

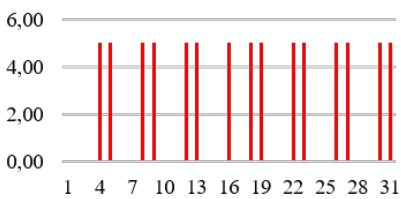
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
63,00	4,52	5,00	5,48	6,01	63,75	62,50	-4,88	-4,11	196,50	0,16
64,00	3,99	0,00	6,01	5,30	62,50	62,50	-4,11	-4,66	196,50	-0,10
65,00	4,70	0,00	5,30	4,68	62,50	62,50	-4,66	-5,28	196,50	-0,07
66,00	5,32	5,00	4,68	5,30	62,50	61,25	-5,28	-4,57	203,15	0,26
67,00	4,70	0,00	5,30	4,68	61,25	61,25	-4,57	-5,18	203,15	-0,04
68,00	5,32	5,00	4,68	5,31	61,25	60,00	-5,18	-4,45	209,80	0,28
69,00	4,69	0,00	5,31	4,68	60,00	60,00	-4,45	-5,04	209,80	-0,01
70,00	5,32	0,00	4,68	4,13	60,00	60,00	-5,04	-5,71	209,80	-0,01
71,00	5,87	5,00	4,13	4,82	60,00	58,75	-5,71	-5,06	217,14	0,28
72,00	5,18	0,00	4,82	4,25	58,75	58,75	-5,06	-5,73	217,14	-0,05
73,00	5,75	5,00	4,25	4,93	58,75	57,50	-5,73	-5,07	224,32	0,24
74,00	5,07	0,00	4,93	4,35	57,50	57,50	-5,07	-5,75	224,32	-0,08
75,00	5,65	5,00	4,35	5,01	57,50	56,25	-5,75	-5,10	231,38	0,21
76,00	4,99	0,00	5,01	4,43	56,25	56,25	-5,10	-5,78	231,38	-0,11
77,00	5,57	5,00	4,43	5,08	56,25	55,00	-5,78	-5,13	238,35	0,19
78,00	4,92	0,00	5,08	4,48	55,00	55,00	-5,13	-5,81	238,35	-0,14
79,00	5,52	5,00	4,48	5,13	55,00	53,75	-5,81	-5,17	245,24	0,16
80,00	4,87	0,00	5,13	4,53	53,75	53,75	-5,17	-5,86	245,24	-0,16
81,00	5,47	5,00	4,53	5,17	53,75	52,50	-5,86	-5,22	252,08	0,14
82,00	4,83	0,00	5,17	4,56	52,50	52,50	-5,22	-5,92	252,08	-0,18
83,00	5,44	5,00	4,56	5,20	52,50	51,25	-5,92	-5,29	258,88	0,12
84,00	4,80	0,00	5,20	4,59	51,25	51,25	-5,29	-6,00	258,88	-0,21
85,00	5,41	5,00	4,59	5,23	51,25	50,00	-6,00	-5,38	265,64	0,09
86,00	4,77	0,00	5,23	4,61	50,00	50,00	-5,38	-6,10	265,64	-0,24
87,00	5,39	5,00	4,61	5,25	50,00	48,75	-6,10	-5,49	272,37	0,06
88,00	4,75	5,00	5,25	5,80	48,75	47,50	-5,49	-4,81	278,31	0,06
89,00	4,20	5,00	5,80	6,30	47,50	46,25	-4,81	-4,03	283,56	0,10
90,00	3,70	0,00	6,30	5,56	46,25	46,25	-4,03	-4,56	283,56	-0,15
91,00	4,44	0,00	5,56	4,90	46,25	46,25	-4,56	-5,17	283,56	-0,10
92,00	5,10	0,00	4,90	4,33	46,25	46,25	-5,17	-5,86	283,56	-0,10
93,00	5,67	0,00	4,33	3,82	46,25	46,25	-5,86	-6,64	283,56	-0,14
94,00	6,18	5,00	3,82	4,55	46,25	45,00	-6,64	-6,11	291,29	0,11
95,00	5,45	5,00	4,55	5,19	45,00	43,75	-6,11	-5,51	298,10	0,07
96,00	4,81	5,00	5,19	5,75	43,75	42,50	-5,51	-4,82	304,12	0,07
97,00	4,25	5,00	5,75	6,25	42,50	41,25	-4,82	-4,05	309,43	0,11
98,00	3,75	0,00	6,25	5,52	41,25	41,25	-4,05	-4,59	309,43	-0,14
99,00	4,48	0,00	5,52	4,87	41,25	41,25	-4,59	-5,20	309,43	-0,10
100,00	5,13	0,00	4,87	4,30	41,25	41,25	-5,20	-5,89	309,43	-0,10
101,00	5,70	0,00	4,30	3,79	41,25	41,25	-5,89	-6,68	309,43	-0,14
102,00	6,21	5,00	3,79	4,52	41,25	40,00	-6,68	-6,15	317,19	0,11
103,00	5,48	5,00	4,52	5,16	40,00	38,75	-6,15	-5,55	324,04	0,06
104,00	4,84	5,00	5,16	5,73	38,75	37,50	-5,55	-4,87	330,08	0,06
105,00	4,27	5,00	5,73	6,23	37,50	36,25	-4,87	-4,11	335,42	0,10
106,00	3,77	0,00	6,23	5,50	36,25	36,25	-4,11	-4,65	335,42	-0,15
107,00	4,50	0,00	5,50	4,86	36,25	36,25	-4,65	-5,27	335,42	-0,11
108,00	5,14	0,00	4,86	4,28	36,25	36,25	-5,27	-5,98	335,42	-0,12
109,00	5,72	0,00	4,28	3,78	36,25	36,25	-5,98	-6,77	335,42	-0,16
110,00	6,22	5,00	3,78	4,51	36,25	35,00	-6,77	-6,26	343,19	0,08
111,00	5,49	5,00	4,51	5,16	35,00	33,75	-6,26	-5,67	350,05	0,04
112,00	4,84	5,00	5,16	5,73	33,75	32,50	-5,67	-5,01	356,10	0,03
113,00	4,27	5,00	5,73	6,23	32,50	31,25	-5,01	-4,26	361,45	0,07
114,00	3,77	0,00	6,23	5,50	31,25	31,25	-4,26	-4,83	361,45	-0,19
115,00	4,50	0,00	5,50	4,85	31,25	31,25	-4,83	-5,47	361,45	-0,16
116,00	5,15	0,00	4,85	4,28	31,25	31,25	-5,47	-6,20	361,45	-0,17
117,00	5,72	5,00	4,28	4,95	31,25	30,00	-6,20	-5,61	368,59	0,11
118,00	5,05	5,00	4,95	5,55	30,00	28,75	-5,61	-4,94	374,90	0,10
119,00	4,45	5,00	5,55	6,07	28,75	27,50	-4,94	-4,19	380,47	0,13
120,00	3,93	5,00	6,07	6,53	27,50	26,25	-4,19	-3,33	385,39	0,20
121,00	3,47	5,00	6,53	6,94	26,25	25,00	-3,33	-2,35	389,72	0,31
122,00	3,06	5,00	6,94	7,30	25,00	23,75	-2,35	-1,25	393,55	0,47
123,00	2,70	5,00	7,30	7,62	23,75	22,50	-1,25	0,00	396,93	0,68

T
Cas 6

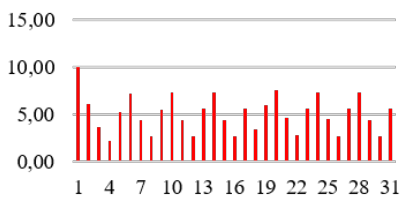
$p(n)$



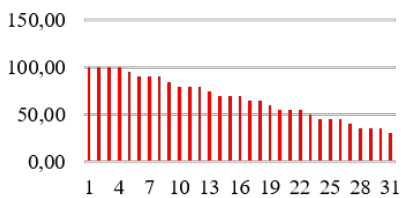
$u(n)$



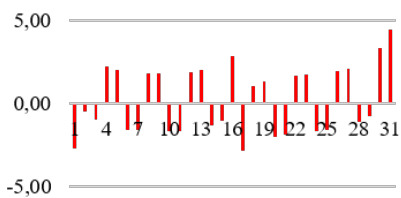
$Q(n)$



$x(n)$

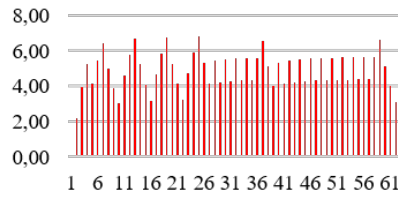


$\sigma(n)$

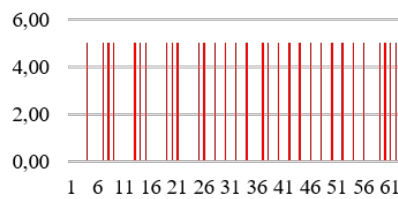


T/2
Cas 14

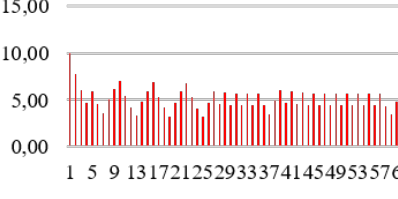
$p(n)$



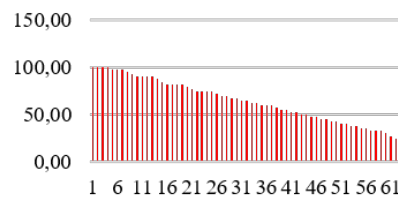
$u(n)$



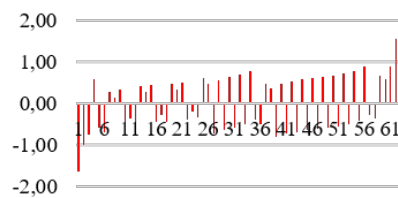
$Q(n)$



$x(n)$

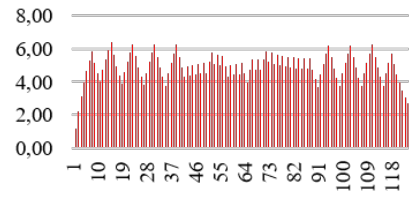


$\sigma(n)$

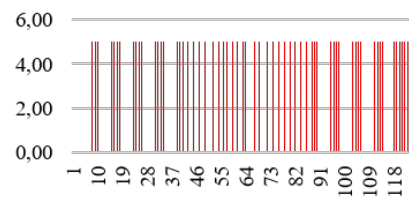


T/4
Cas 22

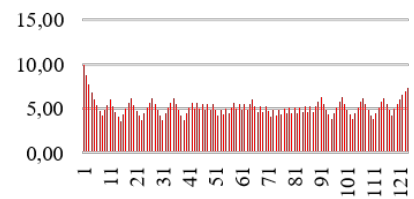
$p(n)$



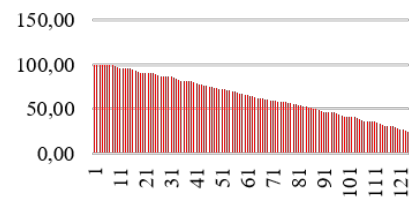
$u(n)$



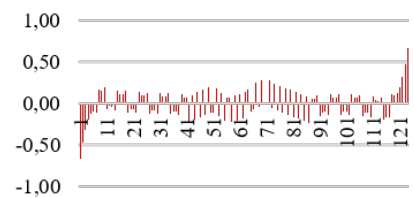
$Q(n)$



$x(n)$



$\sigma(n)$



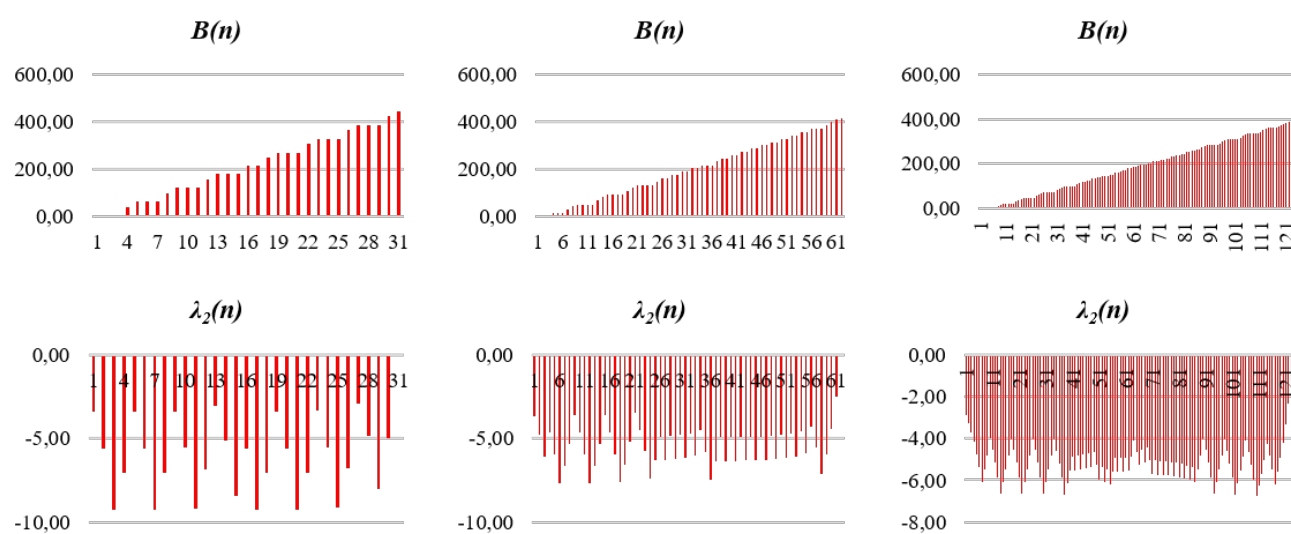


Figura 23: Representació gràfica simulació casos 6, 14 i 22

Condicions 3

En aquest apartat es mostren tant les simulacions com la representació gràfica d'aquestes per les **condicions 3** del problema.

x_0	p_m	u_m	ρ	Q_m	Q_0	m
100	10	5	5	1	1	10

Primer tenint en compte **N=5**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 21: *Simulacions en condicions 3 per N=5 i T=1. CAS 3*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,01	100,00	100,00	-0,34	-50,00	0,00	-9,93
1,00	9,93	5,00	0,01	0,99	100,00	95,00	-50,00	-0,34	49,66	9,87
2,00	0,07	0,00	0,99	0,01	95,00	95,00	-0,34	-50,00	49,66	-9,87
3,00	9,93	5,00	0,01	0,99	95,00	90,00	-50,00	-0,34	99,33	9,87
4,00	0,07	0,00	0,99	0,01	90,00	90,00	-0,34	-50,00	99,33	-9,87
5,00	9,93	5,00	0,01	0,99	90,00	85,00	-50,00	0,00	148,99	9,93

Taula 22: *Simulacions en condicions 3 per N=5 i T=0,5. CAS 11*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,08	100,00	100,00	-4,75	-25,87	0,00	-4,75
1,00	9,18	5,00	0,08	0,92	100,00	97,50	-25,87	-4,75	22,95	8,31
2,00	0,75	0,00	0,92	0,08	97,50	97,50	-4,75	-25,87	22,95	-4,00
3,00	9,24	5,00	0,08	0,92	97,50	95,00	-25,87	-4,75	46,05	8,37
4,00	0,76	0,00	0,92	0,08	95,00	95,00	-4,75	-25,87	46,05	-3,99
5,00	9,24	5,00	0,08	0,92	95,00	92,50	-25,87	-4,75	69,15	8,37
6,00	0,76	0,00	0,92	0,08	92,50	92,50	-4,75	-25,87	69,15	-3,99
7,00	9,24	5,00	0,08	0,92	92,50	90,00	-25,87	-4,74	92,26	8,37
8,00	0,76	0,00	0,92	0,08	90,00	90,00	-4,74	-25,84	92,26	-3,99
9,00	9,24	5,00	0,08	0,92	90,00	87,50	-25,84	-4,59	115,36	8,40
10,00	0,76	0,00	0,92	0,08	87,50	87,50	-4,59	-25,00	115,36	-3,83
11,00	9,24	5,00	0,08	0,92	87,50	85,00	-25,00	0,00	138,46	9,24

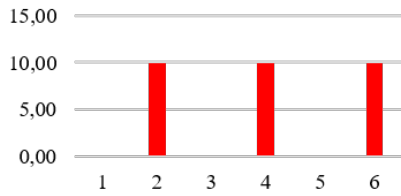
Taula 23: Simulacions en condicions 3 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 19

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,29	100,00	100,00	-3,90	-13,62	0,00	-1,94
1,00	7,13	5,00	0,29	0,80	100,00	98,75	-13,62	-3,90	8,92	1,23
2,00	2,04	0,00	0,80	0,23	98,75	98,75	-3,90	-13,61	8,92	-1,43
3,00	7,72	5,00	0,23	0,78	98,75	97,50	-13,61	-3,88	18,57	1,38
4,00	2,21	0,00	0,78	0,22	97,50	97,50	-3,88	-13,56	18,57	-1,38
5,00	7,77	5,00	0,22	0,78	97,50	96,25	-13,56	-3,69	28,28	1,42
6,00	2,23	0,00	0,78	0,22	96,25	96,25	-3,69	-12,89	28,28	-1,28
7,00	7,77	5,00	0,22	0,78	96,25	95,00	-12,89	-1,35	38,00	1,75
8,00	2,23	0,00	0,78	0,22	95,00	95,00	-1,35	-4,70	38,00	-0,11
9,00	7,77	0,00	0,22	0,06	95,00	95,00	-4,70	-16,40	38,00	-0,40
10,00	9,36	5,00	0,06	0,73	95,00	93,75	-16,40	-13,62	49,70	0,40
11,00	2,68	5,00	0,73	0,92	93,75	92,50	-13,62	-3,91	53,05	0,11
12,00	0,77	0,00	0,92	0,26	92,50	92,50	-3,91	-13,64	53,05	-1,75
13,00	7,36	5,00	0,26	0,79	92,50	91,25	-13,64	-3,96	62,25	1,27
14,00	2,11	0,00	0,79	0,23	91,25	91,25	-3,96	-13,83	62,25	-1,45
15,00	7,74	5,00	0,23	0,78	91,25	90,00	-13,83	-4,63	71,92	1,27
16,00	2,22	0,00	0,78	0,22	90,00	90,00	-4,63	-16,17	71,92	-1,75
17,00	7,77	5,00	0,22	0,78	90,00	88,75	-16,17	-12,82	81,63	0,11
18,00	2,23	5,00	0,78	0,94	88,75	87,50	-12,82	-1,11	84,41	0,40
19,00	0,64	0,00	0,94	0,27	87,50	87,50	-1,11	-3,88	84,41	-0,39
20,00	7,32	0,00	0,27	0,08	87,50	87,50	-3,88	-13,53	84,41	-0,10
21,00	9,23	5,00	0,08	0,74	87,50	86,25	-13,53	-3,58	95,95	1,80
22,00	2,64	0,00	0,74	0,21	86,25	86,25	-3,58	-12,50	95,95	-1,12
23,00	7,89	5,00	0,21	0,77	86,25	85,00	-12,50	0,00	105,82	1,97

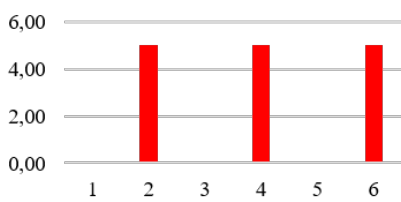
Seguidament es dibuixa una representació gràfica de les tres simulacions.

T
Cas 3

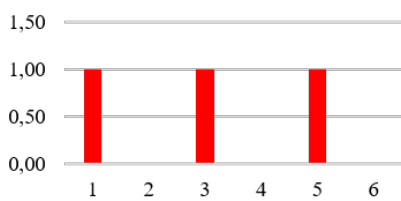
$p(n)$



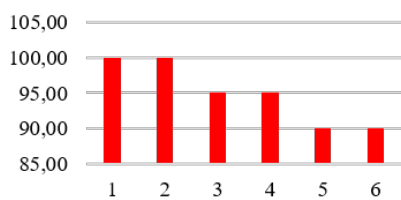
$u(n)$



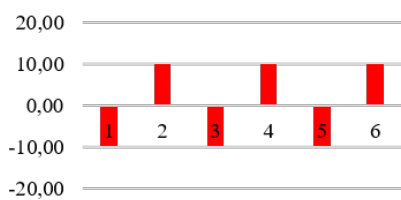
$Q(n)$



$x(n)$

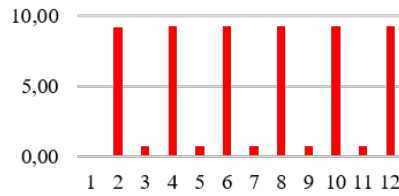


$\sigma(n)$

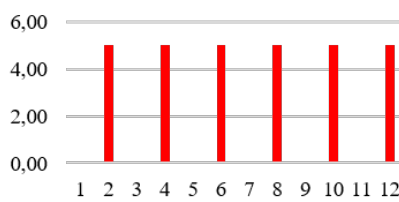


T/2
Cas 11

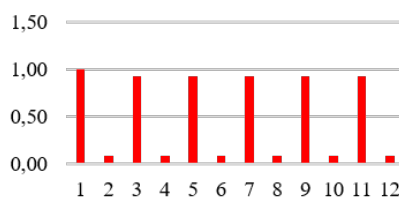
$p(n)$



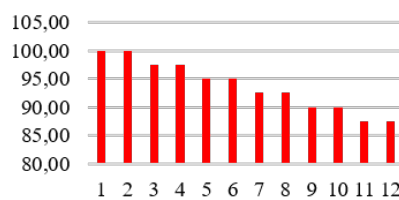
$u(n)$



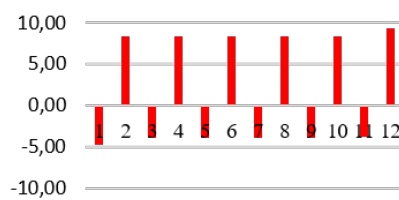
$Q(n)$



$x(n)$

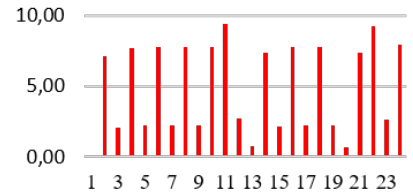


$\sigma(n)$

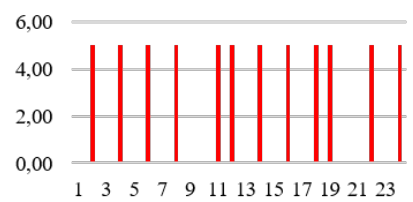


T/4
Cas 19

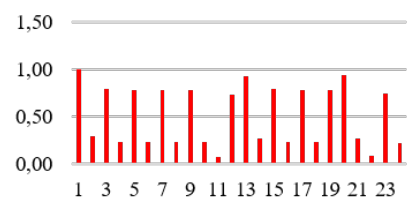
$p(n)$



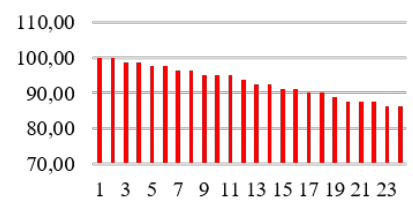
$u(n)$



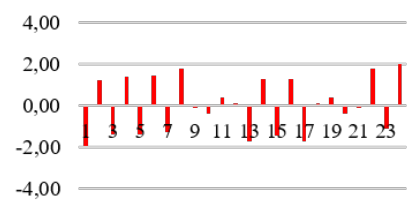
$Q(n)$



$x(n)$



$\sigma(n)$



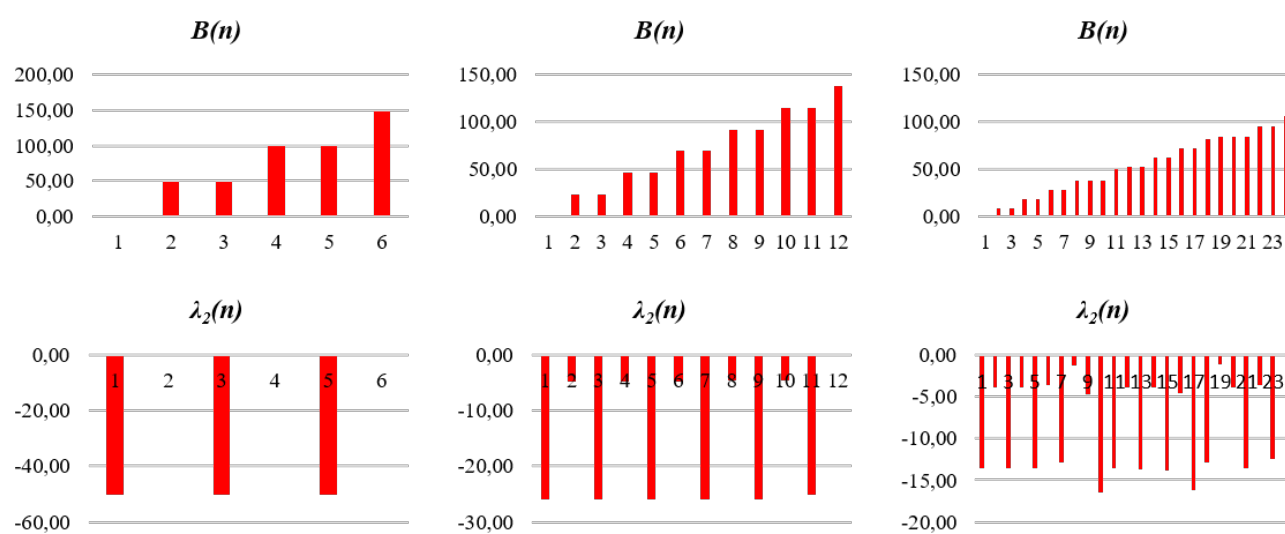


Figura 24: Representació gràfica simulació casos 3, 11 i 19

Ara es té en compte **N=30**. Les taules de sota mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 24: *Simulacions en condicions 3 per N=30 i T=1. CAS 7*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,01	100,00	100,00	-0,34	-50,00	0,00	-9,93
1,00	9,93	5,00	0,01	0,99	100,00	95,00	-50,00	-0,34	49,66	9,87
2,00	0,07	0,00	0,99	0,01	95,00	95,00	-0,34	-50,00	49,66	-9,87
3,00	9,93	5,00	0,01	0,99	95,00	90,00	-50,00	-0,34	99,33	9,87
4,00	0,07	0,00	0,99	0,01	90,00	90,00	-0,34	-50,00	99,33	-9,87
5,00	9,93	5,00	0,01	0,99	90,00	85,00	-50,00	-0,34	148,99	9,87
6,00	0,07	0,00	0,99	0,01	85,00	85,00	-0,34	-50,00	148,99	-9,87
7,00	9,93	5,00	0,01	0,99	85,00	80,00	-50,00	-0,34	198,66	9,87
8,00	0,07	0,00	0,99	0,01	80,00	80,00	-0,34	-50,00	198,66	-9,87
9,00	9,93	5,00	0,01	0,99	80,00	75,00	-50,00	-0,34	248,32	9,87
10,00	0,07	0,00	0,99	0,01	75,00	75,00	-0,34	-50,00	248,32	-9,87
11,00	9,93	5,00	0,01	0,99	75,00	70,00	-50,00	-0,34	297,99	9,87
12,00	0,07	0,00	0,99	0,01	70,00	70,00	-0,34	-50,00	297,99	-9,87
13,00	9,93	5,00	0,01	0,99	70,00	65,00	-50,00	-0,34	347,66	9,87
14,00	0,07	0,00	0,99	0,01	65,00	65,00	-0,34	-50,00	347,66	-9,87
15,00	9,93	5,00	0,01	0,99	65,00	60,00	-50,00	-0,34	397,32	9,87
16,00	0,07	0,00	0,99	0,01	60,00	60,00	-0,34	-50,00	397,32	-9,87
17,00	9,93	5,00	0,01	0,99	60,00	55,00	-50,00	-0,34	446,99	9,87
18,00	0,07	0,00	0,99	0,01	55,00	55,00	-0,34	-50,00	446,99	-9,87
19,00	9,93	5,00	0,01	0,99	55,00	50,00	-50,00	0,00	496,65	9,93
20,00	0,07	0,00	0,99	0,01	50,00	50,00	0,00	-0,34	496,65	0,00
21,00	9,93	0,00	0,01	0,00	50,00	50,00	-0,34	-50,00	496,65	0,00
22,00	10,00	5,00	0,00	0,99	50,00	45,00	-50,00	-0,34	546,65	9,93
23,00	0,07	0,00	0,99	0,01	45,00	45,00	-0,34	-50,00	546,65	-9,87
24,00	9,93	5,00	0,01	0,99	45,00	40,00	-50,00	-0,34	596,31	9,87
25,00	0,07	0,00	0,99	0,01	40,00	40,00	-0,34	-50,00	596,31	-9,87
26,00	9,93	5,00	0,01	0,99	40,00	35,00	-50,00	-0,34	645,98	9,87
27,00	0,07	0,00	0,99	0,01	35,00	35,00	-0,34	-50,00	645,98	-9,87
28,00	9,93	5,00	0,01	0,99	35,00	30,00	-50,00	-0,34	695,65	9,87
29,00	0,07	0,00	0,99	0,01	30,00	30,00	-0,34	-50,00	695,65	-9,87
30,00	9,93	5,00	0,01	0,99	30,00	25,00	-50,00	0,00	745,31	9,93

Taula 25: Simulacions en condicions 3 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 18

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,08	100,00	100,00	-2,07	-25,17	0,00	-4,62
1,00	9,18	5,00	0,08	0,92	100,00	97,50	-25,17	-2,07	22,95	8,80
2,00	0,75	0,00	0,92	0,08	97,50	97,50	-2,07	-25,17	22,95	-3,87
3,00	9,24	5,00	0,08	0,92	97,50	95,00	-25,17	-2,07	46,05	8,86
4,00	0,76	0,00	0,92	0,08	95,00	95,00	-2,07	-25,17	46,05	-3,86
5,00	9,24	5,00	0,08	0,92	95,00	92,50	-25,17	-2,07	69,15	8,86
6,00	0,76	0,00	0,92	0,08	92,50	92,50	-2,07	-25,17	69,15	-3,86
7,00	9,24	5,00	0,08	0,92	92,50	90,00	-25,17	-2,07	92,26	8,86
8,00	0,76	0,00	0,92	0,08	90,00	90,00	-2,07	-25,17	92,26	-3,86
9,00	9,24	5,00	0,08	0,92	90,00	87,50	-25,17	-2,05	115,36	8,86
10,00	0,76	0,00	0,92	0,08	87,50	87,50	-2,05	-25,01	115,36	-3,83
11,00	9,24	5,00	0,08	0,92	87,50	85,00	-25,01	-0,17	138,46	9,21
12,00	0,76	0,00	0,92	0,08	85,00	85,00	-0,17	-2,07	138,46	0,38
13,00	9,24	0,00	0,08	0,01	85,00	85,00	-2,07	-25,17	138,46	4,62
14,00	9,94	5,00	0,01	0,92	85,00	82,50	-25,17	-2,07	163,31	9,56
15,00	0,82	0,00	0,92	0,08	82,50	82,50	-2,07	-25,17	163,31	-3,80
16,00	9,25	5,00	0,08	0,92	82,50	80,00	-25,17	-2,07	186,42	8,87
17,00	0,76	0,00	0,92	0,08	80,00	80,00	-2,07	-25,18	186,42	-3,86
18,00	9,24	5,00	0,08	0,92	80,00	77,50	-25,18	-2,22	209,53	8,83
19,00	0,76	0,00	0,92	0,08	77,50	77,50	-2,22	-27,07	209,53	-4,21
20,00	9,24	5,00	0,08	0,92	77,50	75,00	-27,07	-25,17	232,63	4,62
21,00	0,76	5,00	0,92	0,99	75,00	72,50	-25,17	-2,07	234,53	0,38
22,00	0,06	0,00	0,99	0,08	72,50	72,50	-2,07	-25,17	234,53	-4,56
23,00	9,18	5,00	0,08	0,92	72,50	70,00	-25,17	-2,07	257,49	8,80
24,00	0,75	0,00	0,92	0,08	70,00	70,00	-2,07	-25,18	257,49	-3,87
25,00	9,24	5,00	0,08	0,92	70,00	67,50	-25,18	-2,22	280,59	8,83
26,00	0,76	0,00	0,92	0,08	67,50	67,50	-2,22	-27,07	280,59	-4,21
27,00	9,24	5,00	0,08	0,92	67,50	65,00	-27,07	-25,17	303,69	4,62
28,00	0,76	5,00	0,92	0,99	65,00	62,50	-25,17	-2,05	305,59	0,38
29,00	0,06	0,00	0,99	0,08	62,50	62,50	-2,05	-25,01	305,59	-4,53
30,00	9,18	5,00	0,08	0,92	62,50	60,00	-25,01	-0,17	328,55	9,15
31,00	0,75	0,00	0,92	0,08	60,00	60,00	-0,17	-2,07	328,55	0,37
32,00	9,24	0,00	0,08	0,01	60,00	60,00	-2,07	-25,18	328,55	4,62
33,00	9,94	5,00	0,01	0,92	60,00	57,50	-25,18	-2,22	353,40	9,53
34,00	0,82	0,00	0,92	0,08	57,50	57,50	-2,22	-27,07	353,40	-4,15
35,00	9,25	5,00	0,08	0,92	57,50	55,00	-27,07	-25,17	376,51	4,63
36,00	0,76	5,00	0,92	0,99	55,00	52,50	-25,17	-2,07	378,41	0,38
37,00	0,06	0,00	0,99	0,08	52,50	52,50	-2,07	-25,17	378,41	-4,56
38,00	9,18	5,00	0,08	0,92	52,50	50,00	-25,17	-2,05	401,37	8,81
39,00	0,75	0,00	0,92	0,08	50,00	50,00	-2,05	-25,01	401,37	-3,84
40,00	9,24	5,00	0,08	0,92	50,00	47,50	-25,01	-0,17	424,47	9,21
41,00	0,76	0,00	0,92	0,08	47,50	47,50	-0,17	-2,07	424,47	0,38
42,00	9,24	0,00	0,08	0,01	47,50	47,50	-2,07	-25,18	424,47	4,62
43,00	9,94	5,00	0,01	0,92	47,50	45,00	-25,18	-2,22	449,32	9,53
44,00	0,82	0,00	0,92	0,08	45,00	45,00	-2,22	-27,07	449,32	-4,15
45,00	9,25	5,00	0,08	0,92	45,00	42,50	-27,07	-25,17	472,43	4,63
46,00	0,76	5,00	0,92	0,99	42,50	40,00	-25,17	-2,07	474,33	0,38
47,00	0,06	0,00	0,99	0,08	40,00	40,00	-2,07	-25,17	474,33	-4,56
48,00	9,18	5,00	0,08	0,92	40,00	37,50	-25,17	-2,07	497,29	8,80
49,00	0,75	0,00	0,92	0,08	37,50	37,50	-2,07	-25,18	497,29	-3,87
50,00	9,24	5,00	0,08	0,92	37,50	35,00	-25,18	-2,22	520,39	8,83
51,00	0,76	0,00	0,92	0,08	35,00	35,00	-2,22	-27,07	520,39	-4,21
52,00	9,24	5,00	0,08	0,92	35,00	32,50	-27,07	-25,17	543,50	4,62
53,00	0,76	5,00	0,92	0,99	32,50	30,00	-25,17	-2,07	545,39	0,38
54,00	0,06	0,00	0,99	0,08	30,00	30,00	-2,07	-25,17	545,39	-4,56
55,00	9,18	5,00	0,08	0,92	30,00	27,50	-25,17	-2,07	568,35	8,80
56,00	0,75	0,00	0,92	0,08	27,50	27,50	-2,07	-25,17	568,35	-3,87
57,00	9,24	5,00	0,08	0,92	27,50	25,00	-25,17	-2,07	591,46	8,86
58,00	0,76	0,00	0,92	0,08	25,00	25,00	-2,07	-25,17	591,46	-3,86
59,00	9,24	5,00	0,08	0,92	25,00	22,50	-25,17	-2,05	614,56	8,86
60,00	0,76	0,00	0,92	0,08	22,50	22,50	-2,05	-25,00	614,56	-3,83
61,00	9,24	5,00	0,08	0,92	22,50	20,00	-25,00	0,00	637,66	9,24

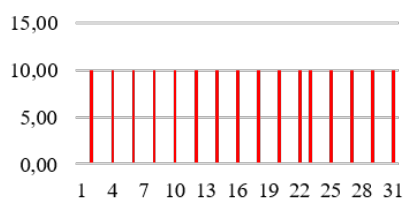
Taula 26: Simulacions en condicions 3 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 23

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	1,00	0,29	100,00	100,00	-3,90	-13,62	0,00	-1,94
1,00	7,13	5,00	0,29	0,80	100,00	98,75	-13,62	-3,90	8,92	1,23
2,00	2,04	0,00	0,80	0,23	98,75	98,75	-3,90	-13,61	8,92	-1,43
3,00	7,72	5,00	0,23	0,78	98,75	97,50	-13,61	-3,88	18,57	1,38
4,00	2,21	0,00	0,78	0,22	97,50	97,50	-3,88	-13,56	18,57	-1,38
5,00	7,77	5,00	0,22	0,78	97,50	96,25	-13,56	-3,69	28,28	1,42
6,00	2,23	0,00	0,78	0,22	96,25	96,25	-3,69	-12,89	28,28	-1,28
7,00	7,77	5,00	0,22	0,78	96,25	95,00	-12,89	-1,34	38,00	1,75
8,00	2,23	0,00	0,78	0,22	95,00	95,00	-1,34	-4,69	38,00	-0,11
9,00	7,77	0,00	0,22	0,06	95,00	95,00	-4,69	-16,38	38,00	-0,39
10,00	9,36	5,00	0,06	0,73	95,00	93,75	-16,38	-13,56	49,70	0,41
11,00	2,68	5,00	0,73	0,92	93,75	92,50	-13,56	-3,69	53,05	0,14
12,00	0,77	0,00	0,92	0,26	92,50	92,50	-3,69	-12,89	53,05	-1,65
13,00	7,36	5,00	0,26	0,79	92,50	91,25	-12,89	-1,35	62,25	1,65
14,00	2,11	0,00	0,79	0,23	91,25	91,25	-1,35	-4,70	62,25	-0,14
15,00	7,74	0,00	0,23	0,06	91,25	91,25	-4,70	-16,40	62,25	-0,41
16,00	9,35	5,00	0,06	0,73	91,25	90,00	-16,40	-13,62	73,94	0,39
17,00	2,68	5,00	0,73	0,92	90,00	88,75	-13,62	-3,90	77,28	0,11
18,00	0,77	0,00	0,92	0,26	88,75	88,75	-3,90	-13,62	77,28	-1,75
19,00	7,35	5,00	0,26	0,79	88,75	87,50	-13,62	-3,90	86,48	1,28
20,00	2,11	0,00	0,79	0,23	87,50	87,50	-3,90	-13,61	86,48	-1,42
21,00	7,74	5,00	0,23	0,78	87,50	86,25	-13,61	-3,88	96,15	1,38
22,00	2,22	0,00	0,78	0,22	86,25	86,25	-3,88	-13,55	96,15	-1,38
23,00	7,77	5,00	0,22	0,78	86,25	85,00	-13,55	-3,67	105,86	1,42
24,00	2,23	0,00	0,78	0,22	85,00	85,00	-3,67	-12,82	105,86	-1,27
25,00	7,77	5,00	0,22	0,78	85,00	83,75	-12,82	-1,12	115,58	1,78
26,00	2,23	0,00	0,78	0,22	83,75	83,75	-1,12	-3,90	115,58	0,00
27,00	7,77	0,00	0,22	0,06	83,75	83,75	-3,90	-13,62	115,58	0,00
28,00	9,36	5,00	0,06	0,73	83,75	82,50	-13,62	-3,90	127,28	1,78
29,00	2,68	0,00	0,73	0,21	82,50	82,50	-3,90	-13,62	127,28	-1,27
30,00	7,90	5,00	0,21	0,77	82,50	81,25	-13,62	-3,91	137,16	1,42
31,00	2,26	0,00	0,77	0,22	81,25	81,25	-3,91	-13,64	137,16	-1,38
32,00	7,78	5,00	0,22	0,78	81,25	80,00	-13,64	-3,97	146,89	1,38
33,00	2,23	0,00	0,78	0,22	80,00	80,00	-3,97	-13,85	146,89	-1,42
34,00	7,77	5,00	0,22	0,78	80,00	78,75	-13,85	-4,70	156,61	1,27
35,00	2,23	0,00	0,78	0,22	78,75	78,75	-4,70	-16,40	156,61	-1,78
36,00	7,77	5,00	0,22	0,78	78,75	77,50	-16,40	-13,62	166,33	0,00
37,00	2,23	5,00	0,78	0,94	77,50	76,25	-13,62	-3,90	169,11	0,00
38,00	0,64	0,00	0,94	0,27	76,25	76,25	-3,90	-13,62	169,11	-1,78
39,00	7,32	5,00	0,27	0,79	76,25	75,00	-13,62	-3,90	178,26	1,27
40,00	2,10	0,00	0,79	0,23	75,00	75,00	-3,90	-13,62	178,26	-1,42
41,00	7,74	5,00	0,23	0,78	75,00	73,75	-13,62	-3,90	187,93	1,38
42,00	2,22	0,00	0,78	0,22	73,75	73,75	-3,90	-13,62	187,93	-1,39
43,00	7,77	5,00	0,22	0,78	73,75	72,50	-13,62	-3,90	197,64	1,39
44,00	2,23	0,00	0,78	0,22	72,50	72,50	-3,90	-13,62	197,64	-1,39
45,00	7,77	5,00	0,22	0,78	72,50	71,25	-13,62	-3,90	207,35	1,39
46,00	2,23	0,00	0,78	0,22	71,25	71,25	-3,90	-13,62	207,35	-1,39
47,00	7,77	5,00	0,22	0,78	71,25	70,00	-13,62	-3,90	217,07	1,39
48,00	2,23	0,00	0,78	0,22	70,00	70,00	-3,90	-13,62	217,07	-1,39
49,00	7,77	5,00	0,22	0,78	70,00	68,75	-13,62	-3,90	226,79	1,39
50,00	2,23	0,00	0,78	0,22	68,75	68,75	-3,90	-13,61	226,79	-1,39
51,00	7,77	5,00	0,22	0,78	68,75	67,50	-13,61	-3,88	236,50	1,39
52,00	2,23	0,00	0,78	0,22	67,50	67,50	-3,88	-13,55	236,50	-1,38
53,00	7,77	5,00	0,22	0,78	67,50	66,25	-13,55	-3,67	246,22	1,42
54,00	2,23	0,00	0,78	0,22	66,25	66,25	-3,67	-12,83	246,22	-1,27
55,00	7,77	5,00	0,22	0,78	66,25	65,00	-12,83	-1,14	255,94	1,78
56,00	2,23	0,00	0,78	0,22	65,00	65,00	-1,14	-3,97	255,94	-0,01
57,00	7,77	0,00	0,22	0,06	65,00	65,00	-3,97	-13,85	255,94	-0,03
58,00	9,36	5,00	0,06	0,73	65,00	63,75	-13,85	-4,70	267,64	1,67
59,00	2,68	0,00	0,73	0,21	63,75	63,75	-4,70	-16,40	267,64	-1,67
60,00	7,90	5,00	0,21	0,77	63,75	62,50	-16,40	-13,62	277,52	0,03
61,00	2,26	5,00	0,77	0,94	62,50	61,25	-13,62	-3,90	280,35	0,01
62,00	0,65	0,00	0,94	0,27	61,25	61,25	-3,90	-13,61	280,35	-1,78

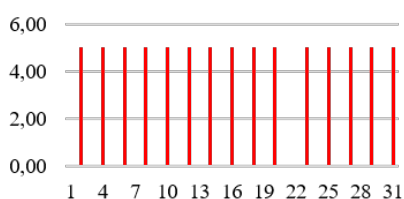
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
63,00	7,32	5,00	0,27	0,79	61,25	60,00	-13,61	-3,88	289,50	1,28
64,00	2,10	0,00	0,79	0,23	60,00	60,00	-3,88	-13,55	289,50	-1,41
65,00	7,74	5,00	0,23	0,78	60,00	58,75	-13,55	-3,67	299,17	1,41
66,00	2,22	0,00	0,78	0,22	58,75	58,75	-3,67	-12,82	299,17	-1,28
67,00	7,77	5,00	0,22	0,78	58,75	57,50	-12,82	-1,12	308,88	1,78
68,00	2,23	0,00	0,78	0,22	57,50	57,50	-1,12	-3,90	308,88	0,00
69,00	7,77	0,00	0,22	0,06	57,50	57,50	-3,90	-13,62	308,88	0,00
70,00	9,36	5,00	0,06	0,73	57,50	56,25	-13,62	-3,90	320,58	1,78
71,00	2,68	0,00	0,73	0,21	56,25	56,25	-3,90	-13,62	320,58	-1,27
72,00	7,90	5,00	0,21	0,77	56,25	55,00	-13,62	-3,90	330,46	1,42
73,00	2,26	0,00	0,77	0,22	55,00	55,00	-3,90	-13,62	330,46	-1,38
74,00	7,78	5,00	0,22	0,78	55,00	53,75	-13,62	-3,90	340,19	1,39
75,00	2,23	0,00	0,78	0,22	53,75	53,75	-3,90	-13,62	340,19	-1,39
76,00	7,77	5,00	0,22	0,78	53,75	52,50	-13,62	-3,90	349,91	1,39
77,00	2,23	0,00	0,78	0,22	52,50	52,50	-3,90	-13,62	349,91	-1,39
78,00	7,77	5,00	0,22	0,78	52,50	51,25	-13,62	-3,90	359,63	1,39
79,00	2,23	0,00	0,78	0,22	51,25	51,25	-3,90	-13,61	359,63	-1,39
80,00	7,77	5,00	0,22	0,78	51,25	50,00	-13,61	-3,88	369,34	1,39
81,00	2,23	0,00	0,78	0,22	50,00	50,00	-3,88	-13,55	369,34	-1,38
82,00	7,77	5,00	0,22	0,78	50,00	48,75	-13,55	-3,67	379,06	1,42
83,00	2,23	0,00	0,78	0,22	48,75	48,75	-3,67	-12,82	379,06	-1,27
84,00	7,77	5,00	0,22	0,78	48,75	47,50	-12,82	-1,12	388,77	1,78
85,00	2,23	0,00	0,78	0,22	47,50	47,50	-1,12	-3,90	388,77	0,00
86,00	7,77	0,00	0,22	0,06	47,50	47,50	-3,90	-13,62	388,77	0,00
87,00	9,36	5,00	0,06	0,73	47,50	46,25	-13,62	-3,91	400,48	1,78
88,00	2,68	0,00	0,73	0,21	46,25	46,25	-3,91	-13,64	400,48	-1,28
89,00	7,90	5,00	0,21	0,77	46,25	45,00	-13,64	-3,97	410,36	1,41
90,00	2,26	0,00	0,77	0,22	45,00	45,00	-3,97	-13,85	410,36	-1,41
91,00	7,78	5,00	0,22	0,78	45,00	43,75	-13,85	-4,70	420,09	1,28
92,00	2,23	0,00	0,78	0,22	43,75	43,75	-4,70	-16,40	420,09	-1,78
93,00	7,77	5,00	0,22	0,78	43,75	42,50	-16,40	-13,62	429,80	0,00
94,00	2,23	5,00	0,78	0,94	42,50	41,25	-13,62	-3,90	432,59	0,00
95,00	0,64	0,00	0,94	0,27	41,25	41,25	-3,90	-13,62	432,59	-1,78
96,00	7,32	5,00	0,27	0,79	41,25	40,00	-13,62	-3,90	441,73	1,27
97,00	2,10	0,00	0,79	0,23	40,00	40,00	-3,90	-13,61	441,73	-1,42
98,00	7,74	5,00	0,23	0,78	40,00	38,75	-13,61	-3,88	451,40	1,38
99,00	2,22	0,00	0,78	0,22	38,75	38,75	-3,88	-13,56	451,40	-1,38
100,00	7,77	5,00	0,22	0,78	38,75	37,50	-13,56	-3,69	461,12	1,42
101,00	2,23	0,00	0,78	0,22	37,50	37,50	-3,69	-12,88	461,12	-1,28
102,00	7,77	5,00	0,22	0,78	37,50	36,25	-12,88	-1,33	470,83	1,75
103,00	2,23	0,00	0,78	0,22	36,25	36,25	-1,33	-4,64	470,83	-0,11
104,00	7,77	0,00	0,22	0,06	36,25	36,25	-4,64	-16,19	470,83	-0,37
105,00	9,36	5,00	0,06	0,73	36,25	35,00	-16,19	-12,89	482,54	0,50
106,00	2,68	5,00	0,73	0,92	35,00	33,75	-12,89	-1,35	485,89	0,48
107,00	0,77	0,00	0,92	0,26	33,75	33,75	-1,35	-4,70	485,89	-0,48
108,00	7,36	0,00	0,26	0,08	33,75	33,75	-4,70	-16,41	485,89	-0,50
109,00	9,24	5,00	0,08	0,74	33,75	32,50	-16,41	-13,64	497,44	0,36
110,00	2,65	5,00	0,74	0,92	32,50	31,25	-13,64	-3,96	500,75	0,10
111,00	0,76	0,00	0,92	0,26	31,25	31,25	-3,96	-13,83	500,75	-1,78
112,00	7,35	5,00	0,26	0,79	31,25	30,00	-13,83	-4,63	509,94	1,18
113,00	2,11	0,00	0,79	0,23	30,00	30,00	-4,63	-16,17	509,94	-1,78
114,00	7,74	5,00	0,23	0,78	30,00	28,75	-16,17	-12,83	519,61	0,10
115,00	2,22	5,00	0,78	0,94	28,75	27,50	-12,83	-1,14	522,39	0,39
116,00	0,64	0,00	0,94	0,27	27,50	27,50	-1,14	-3,97	522,39	-0,41
117,00	7,32	0,00	0,27	0,08	27,50	27,50	-3,97	-13,84	522,39	-0,15
118,00	9,23	5,00	0,08	0,74	27,50	26,25	-13,84	-4,69	533,92	1,64
119,00	2,64	0,00	0,74	0,21	26,25	26,25	-4,69	-16,38	533,92	-1,68
120,00	7,89	5,00	0,21	0,77	26,25	25,00	-16,38	-13,53	543,79	0,04
121,00	2,26	5,00	0,77	0,94	25,00	23,75	-13,53	-3,58	546,62	0,05
122,00	0,65	0,00	0,94	0,27	23,75	23,75	-3,58	-12,50	546,62	-1,62
123,00	7,32	5,00	0,27	0,79	23,75	22,50	-12,50	0,00	555,77	1,83

T
Cas 7

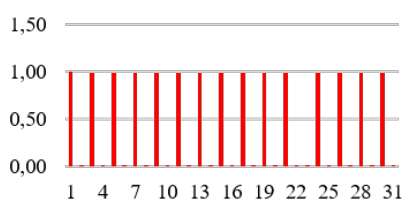
$p(n)$



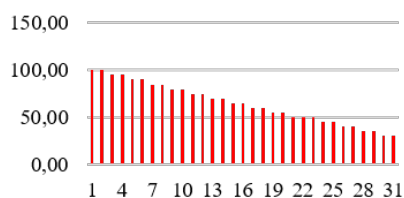
$u(n)$



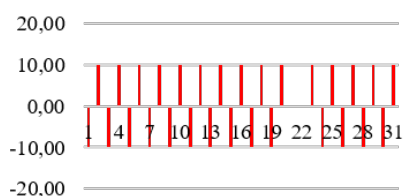
$Q(n)$



$x(n)$

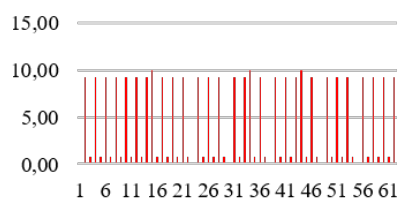


$\sigma(n)$

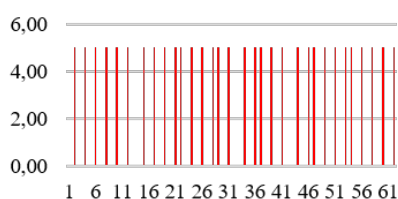


T/2
Cas 15

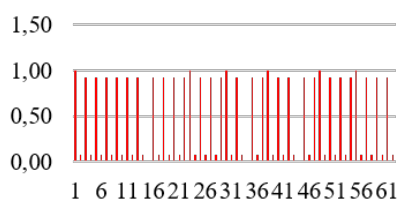
$p(n)$



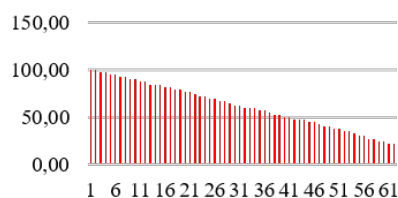
$u(n)$



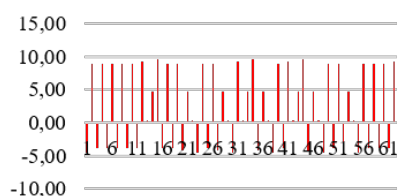
$Q(n)$



$x(n)$

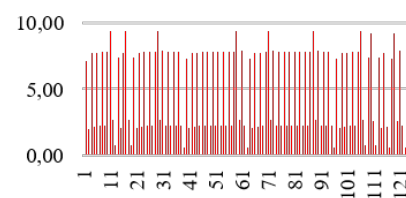


$\sigma(n)$

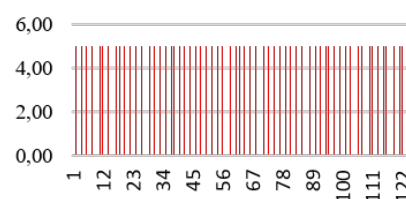


T/4
Cas 23

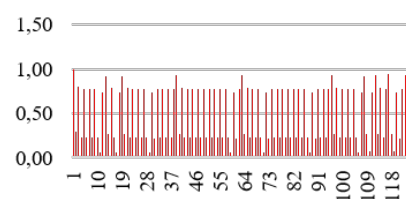
$p(n)$



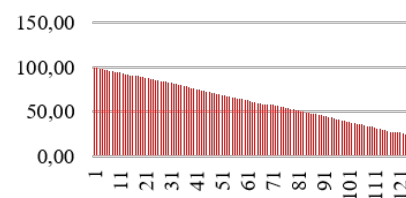
$u(n)$



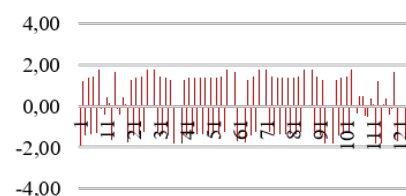
$Q(n)$



$x(n)$



$\sigma(n)$



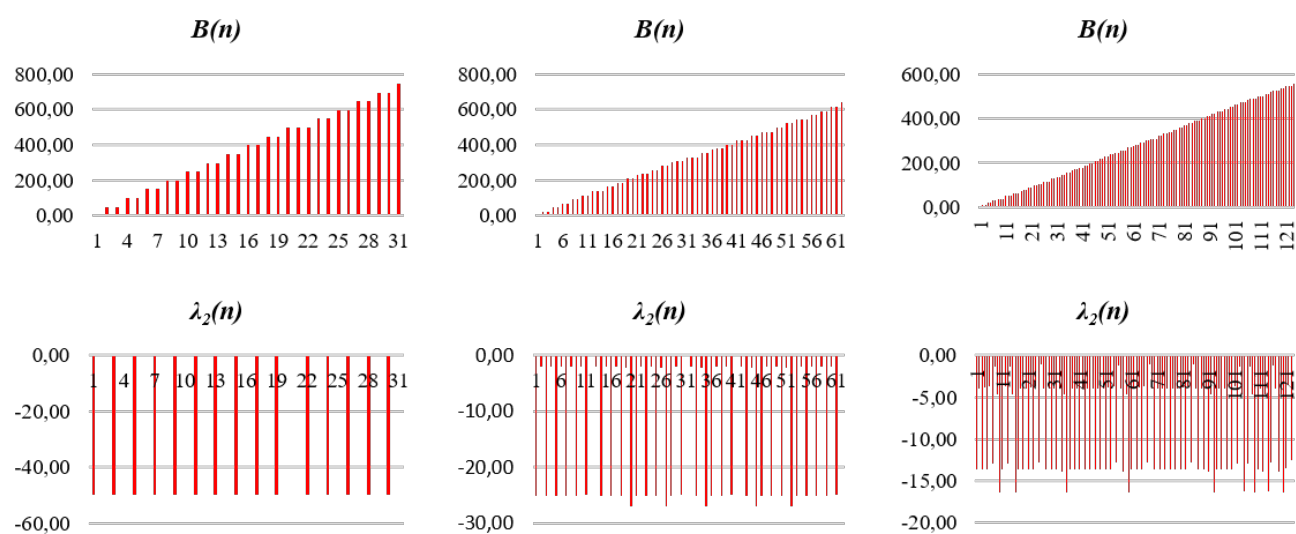


Figura 25: Representació gràfica simulació casos 7, 15 i 23

Condicions 4

En aquest apartat es mostren tant les simulacions com la representació gràfica d'aquestes per les **condicions 4** del problema.

x_0	p_m	u_m	ρ	Q_m	Q_0	m
100	10	5	10	0,5	0,5	20

Primer tenint en compte **N=5**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 27: *Simulacions en condicions 4 per N=5 i T=1. CAS 4*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	100,00	100,00	0,00	-100,00	0,00	-10,00
1,00	10,00	5,00	0,00	0,50	100,00	95,00	-100,00	0,00	50,00	10,00
2,00	0,00	0,00	0,50	0,00	95,00	95,00	0,00	-100,00	50,00	-10,00
3,00	10,00	5,00	0,00	0,50	95,00	90,00	-100,00	0,00	100,00	10,00
4,00	0,00	0,00	0,50	0,00	90,00	90,00	0,00	-100,00	100,00	-10,00
5,00	10,00	5,00	0,00	0,50	90,00	85,00	-100,00	0,00	149,99	10,00

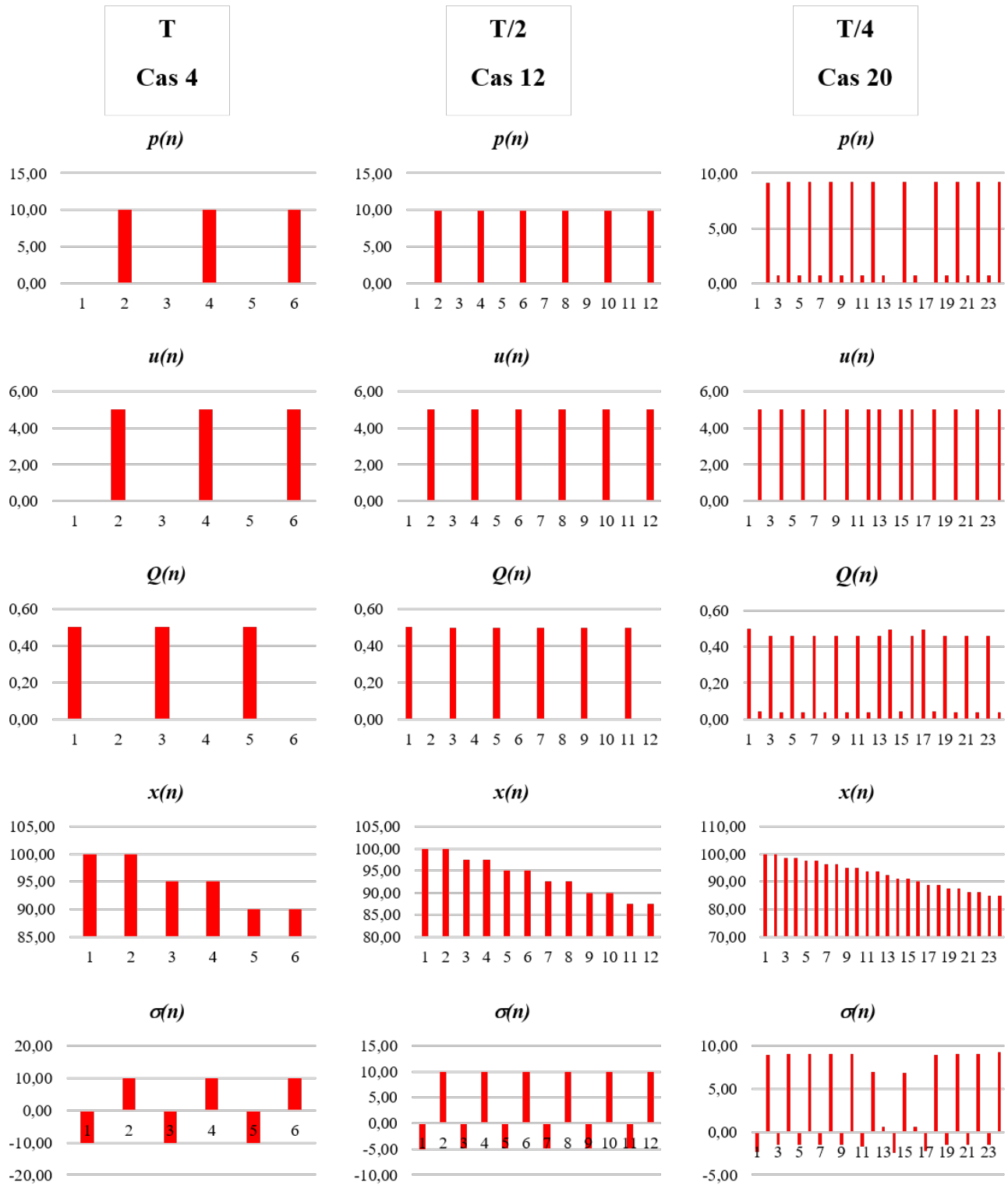
Taula 28: *Simulacions en condicions 4 per N=5 i T=0,5. CAS 12*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	100,00	100,00	-0,34	-50,00	0,00	-4,97
1,00	9,93	5,00	0,00	0,50	100,00	97,50	-50,00	-0,34	24,83	9,90
2,00	0,07	0,00	0,50	0,00	97,50	97,50	-0,34	-50,00	24,83	-4,90
3,00	9,93	5,00	0,00	0,50	97,50	95,00	-50,00	-0,34	49,66	9,90
4,00	0,07	0,00	0,50	0,00	95,00	95,00	-0,34	-50,00	49,66	-4,90
5,00	9,93	5,00	0,00	0,50	95,00	92,50	-50,00	-0,34	74,50	9,90
6,00	0,07	0,00	0,50	0,00	92,50	92,50	-0,34	-50,00	74,50	-4,90
7,00	9,93	5,00	0,00	0,50	92,50	90,00	-50,00	-0,34	99,33	9,90
8,00	0,07	0,00	0,50	0,00	90,00	90,00	-0,34	-50,00	99,33	-4,90
9,00	9,93	5,00	0,00	0,50	90,00	87,50	-50,00	-0,34	124,16	9,90
10,00	0,07	0,00	0,50	0,00	87,50	87,50	-0,34	-50,00	124,16	-4,90
11,00	9,93	5,00	0,00	0,50	87,50	85,00	-50,00	0,00	148,99	9,93

Taula 29: Simulacions en condicions 4 per $N=5$ i $T=0,25$. CAS 20

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,04	100,00	100,00	-2,07	-25,17	0,00	-2,31
1,00	9,18	5,00	0,04	0,46	100,00	98,75	-25,17	-2,07	11,47	8,99
2,00	0,75	0,00	0,46	0,04	98,75	98,75	-2,07	-25,17	11,47	-1,56
3,00	9,24	5,00	0,04	0,46	98,75	97,50	-25,17	-2,07	23,03	9,05
4,00	0,76	0,00	0,46	0,04	97,50	97,50	-2,07	-25,17	23,03	-1,55
5,00	9,24	5,00	0,04	0,46	97,50	96,25	-25,17	-2,07	34,58	9,05
6,00	0,76	0,00	0,46	0,04	96,25	96,25	-2,07	-25,17	34,58	-1,55
7,00	9,24	5,00	0,04	0,46	96,25	95,00	-25,17	-2,07	46,13	9,05
8,00	0,76	0,00	0,46	0,04	95,00	95,00	-2,07	-25,18	46,13	-1,55
9,00	9,24	5,00	0,04	0,46	95,00	93,75	-25,18	-2,22	57,68	9,04
10,00	0,76	0,00	0,46	0,04	93,75	93,75	-2,22	-27,07	57,68	-1,73
11,00	9,24	5,00	0,04	0,46	93,75	92,50	-27,07	-25,18	69,23	6,93
12,00	0,76	5,00	0,46	0,50	92,50	91,25	-25,18	-2,22	70,18	0,55
13,00	0,06	0,00	0,50	0,04	91,25	91,25	-2,22	-27,07	70,18	-2,42
14,00	9,18	5,00	0,04	0,46	91,25	90,00	-27,07	-25,17	81,66	6,87
15,00	0,75	5,00	0,46	0,50	90,00	88,75	-25,17	-2,07	82,60	0,56
16,00	0,06	0,00	0,50	0,04	88,75	88,75	-2,07	-25,17	82,60	-2,25
17,00	9,18	5,00	0,04	0,46	88,75	87,50	-25,17	-2,07	94,08	8,99
18,00	0,75	0,00	0,46	0,04	87,50	87,50	-2,07	-25,17	94,08	-1,56
19,00	9,24	5,00	0,04	0,46	87,50	86,25	-25,17	-2,07	105,63	9,05
20,00	0,76	0,00	0,46	0,04	86,25	86,25	-2,07	-25,17	105,63	-1,55
21,00	9,24	5,00	0,04	0,46	86,25	85,00	-25,17	-2,05	117,19	9,05
22,00	0,76	0,00	0,46	0,04	85,00	85,00	-2,05	-25,00	117,19	-1,54
23,00	9,24	5,00	0,04	0,46	85,00	83,75	-25,00	0,00	128,74	9,24

Seguidament es dibuixa una representació gràfica de les tres simulacions.



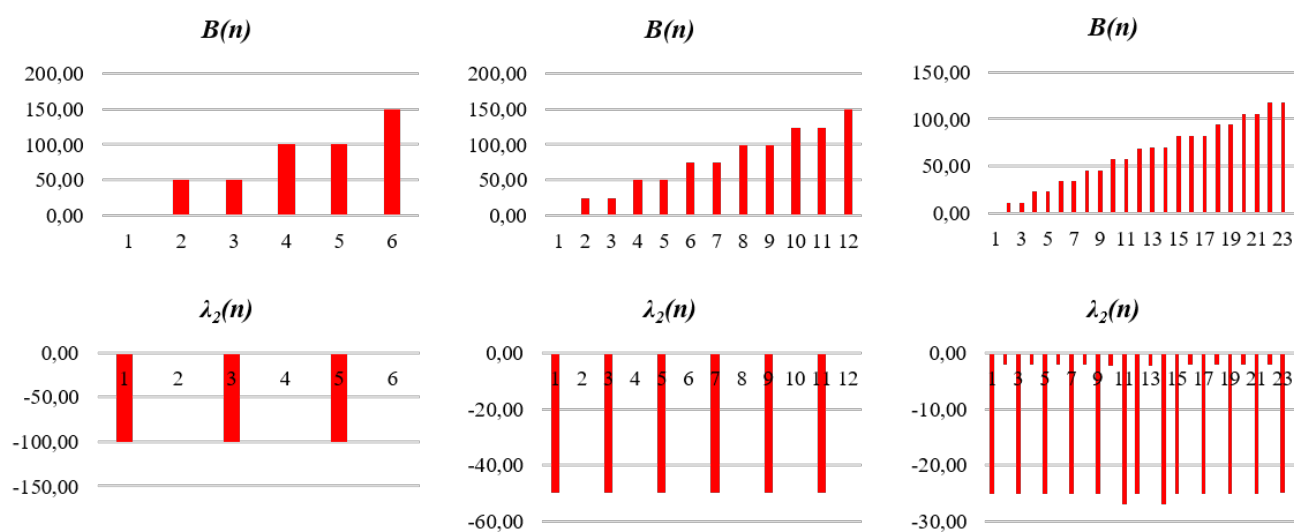


Figura 26: Representació gràfica simulació casos 4, 12 i 20

Ara es té en compte **N=30**. Les taules de sota mostren els resultats numèrics de les simulacions per períodes iguals a 1, 0,5 i 0,25, respectivament.

Taula 30: *Simulacions en condicions 4 per N=30 i T=1. CAS 8*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	100,00	100,00	0,00	-100,00	0,00	-10,00
1,00	10,00	5,00	0,00	0,50	100,00	95,00	-100,00	0,00	50,00	10,00
2,00	0,00	0,00	0,50	0,00	95,00	95,00	0,00	-100,00	50,00	-10,00
3,00	10,00	5,00	0,00	0,50	95,00	90,00	-100,00	0,00	100,00	10,00
4,00	0,00	0,00	0,50	0,00	90,00	90,00	0,00	-100,00	100,00	-10,00
5,00	10,00	5,00	0,00	0,50	90,00	85,00	-100,00	0,00	149,99	10,00
6,00	0,00	0,00	0,50	0,00	85,00	85,00	0,00	-100,00	149,99	-10,00
7,00	10,00	5,00	0,00	0,50	85,00	80,00	-100,00	0,00	199,99	10,00
8,00	0,00	0,00	0,50	0,00	80,00	80,00	0,00	-100,00	199,99	-10,00
9,00	10,00	5,00	0,00	0,50	80,00	75,00	-100,00	0,00	249,99	10,00
10,00	0,00	0,00	0,50	0,00	75,00	75,00	0,00	-100,00	249,99	-10,00
11,00	10,00	5,00	0,00	0,50	75,00	70,00	-100,00	0,00	299,99	10,00
12,00	0,00	0,00	0,50	0,00	70,00	70,00	0,00	-100,00	299,99	-10,00
13,00	10,00	5,00	0,00	0,50	70,00	65,00	-100,00	0,00	349,98	10,00
14,00	0,00	0,00	0,50	0,00	65,00	65,00	0,00	-100,00	349,98	-10,00
15,00	10,00	5,00	0,00	0,50	65,00	60,00	-100,00	0,00	399,98	10,00
16,00	0,00	0,00	0,50	0,00	60,00	60,00	0,00	-100,00	399,98	-10,00
17,00	10,00	5,00	0,00	0,50	60,00	55,00	-100,00	0,00	449,98	10,00
18,00	0,00	0,00	0,50	0,00	55,00	55,00	0,00	0,00	449,98	0,00
19,00	10,00	0,00	0,00	0,00	55,00	55,00	0,00	-100,00	449,98	0,00
20,00	10,00	5,00	0,00	0,50	55,00	50,00	-100,00	0,00	499,98	10,00
21,00	0,00	0,00	0,50	0,00	50,00	50,00	0,00	-100,00	499,98	-10,00
22,00	10,00	5,00	0,00	0,50	50,00	45,00	-100,00	0,00	549,98	10,00
23,00	0,00	0,00	0,50	0,00	45,00	45,00	0,00	-100,00	549,98	-10,00
24,00	10,00	5,00	0,00	0,50	45,00	40,00	-100,00	0,00	599,98	10,00
25,00	0,00	0,00	0,50	0,00	40,00	40,00	0,00	-100,00	599,98	-10,00
26,00	10,00	5,00	0,00	0,50	40,00	35,00	-100,00	0,00	649,97	10,00
27,00	0,00	0,00	0,50	0,00	35,00	35,00	0,00	-100,00	649,97	-10,00
28,00	10,00	5,00	0,00	0,50	35,00	30,00	-100,00	0,00	699,97	10,00
29,00	0,00	0,00	0,50	0,00	30,00	30,00	0,00	-100,00	699,97	-10,00
30,00	10,00	5,00	0,00	0,50	30,00	25,00	-100,00	0,00	749,97	10,00

Taula 31: Simulacions en condicions 4 per $N=30$ i $T=0,5$. CAS 16

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	100,00	100,00	-0,34	-50,00	0,00	-4,97
1,00	9,93	5,00	0,00	0,50	100,00	97,50	-50,00	-0,34	24,83	9,90
2,00	0,07	0,00	0,50	0,00	97,50	97,50	-0,34	-50,00	24,83	-4,90
3,00	9,93	5,00	0,00	0,50	97,50	95,00	-50,00	-0,34	49,66	9,90
4,00	0,07	0,00	0,50	0,00	95,00	95,00	-0,34	-50,00	49,66	-4,90
5,00	9,93	5,00	0,00	0,50	95,00	92,50	-50,00	-0,34	74,50	9,90
6,00	0,07	0,00	0,50	0,00	92,50	92,50	-0,34	-50,00	74,50	-4,90
7,00	9,93	5,00	0,00	0,50	92,50	90,00	-50,00	-0,34	99,33	9,90
8,00	0,07	0,00	0,50	0,00	90,00	90,00	-0,34	-50,00	99,33	-4,90
9,00	9,93	5,00	0,00	0,50	90,00	87,50	-50,00	-0,34	124,16	9,90
10,00	0,07	0,00	0,50	0,00	87,50	87,50	-0,34	-50,00	124,16	-4,90
11,00	9,93	5,00	0,00	0,50	87,50	85,00	-50,00	-0,34	148,99	9,90
12,00	0,07	0,00	0,50	0,00	85,00	85,00	-0,34	-50,00	148,99	-4,90
13,00	9,93	5,00	0,00	0,50	85,00	82,50	-50,00	-0,34	173,83	9,90
14,00	0,07	0,00	0,50	0,00	82,50	82,50	-0,34	-50,00	173,83	-4,90
15,00	9,93	5,00	0,00	0,50	82,50	80,00	-50,00	-0,34	198,66	9,90
16,00	0,07	0,00	0,50	0,00	80,00	80,00	-0,34	-50,34	198,66	-4,93
17,00	9,93	5,00	0,00	0,50	80,00	77,50	-50,34	-50,00	223,49	4,97
18,00	0,07	5,00	0,50	0,50	77,50	75,00	-50,00	-0,34	223,66	0,03
19,00	0,00	0,00	0,50	0,00	75,00	75,00	-0,34	-50,00	223,66	-4,97
20,00	9,93	5,00	0,00	0,50	75,00	72,50	-50,00	-0,34	248,49	9,90
21,00	0,07	0,00	0,50	0,00	72,50	72,50	-0,34	-50,00	248,49	-4,90
22,00	9,93	5,00	0,00	0,50	72,50	70,00	-50,00	-0,34	273,32	9,90
23,00	0,07	0,00	0,50	0,00	70,00	70,00	-0,34	-50,00	273,32	-4,90
24,00	9,93	5,00	0,00	0,50	70,00	67,50	-50,00	-0,34	298,16	9,90
25,00	0,07	0,00	0,50	0,00	67,50	67,50	-0,34	-50,00	298,16	-4,90
26,00	9,93	5,00	0,00	0,50	67,50	65,00	-50,00	-0,34	322,99	9,90
27,00	0,07	0,00	0,50	0,00	65,00	65,00	-0,34	-50,00	322,99	-4,90
28,00	9,93	5,00	0,00	0,50	65,00	62,50	-50,00	-0,34	347,82	9,90
29,00	0,07	0,00	0,50	0,00	62,50	62,50	-0,34	-50,00	347,82	-4,90
30,00	9,93	5,00	0,00	0,50	62,50	60,00	-50,00	-0,34	372,66	9,90
31,00	0,07	0,00	0,50	0,00	60,00	60,00	-0,34	-50,00	372,66	-4,90
32,00	9,93	5,00	0,00	0,50	60,00	57,50	-50,00	-0,34	397,49	9,90
33,00	0,07	0,00	0,50	0,00	57,50	57,50	-0,34	-50,00	397,49	-4,90
34,00	9,93	5,00	0,00	0,50	57,50	55,00	-50,00	-0,34	422,32	9,90
35,00	0,07	0,00	0,50	0,00	55,00	55,00	-0,34	-50,00	422,32	-4,90
36,00	9,93	5,00	0,00	0,50	55,00	52,50	-50,00	-0,34	447,15	9,90
37,00	0,07	0,00	0,50	0,00	52,50	52,50	-0,34	-50,00	447,15	-4,90
38,00	9,93	5,00	0,00	0,50	52,50	50,00	-50,00	-0,34	471,99	9,90
39,00	0,07	0,00	0,50	0,00	50,00	50,00	-0,34	-50,00	471,99	-4,90
40,00	9,93	5,00	0,00	0,50	50,00	47,50	-50,00	-0,34	496,82	9,90
41,00	0,07	0,00	0,50	0,00	47,50	47,50	-0,34	-50,00	496,82	-4,90
42,00	9,93	5,00	0,00	0,50	47,50	45,00	-50,00	-0,34	521,65	9,90
43,00	0,07	0,00	0,50	0,00	45,00	45,00	-0,34	-50,34	521,65	-4,93
44,00	9,93	5,00	0,00	0,50	45,00	42,50	-50,34	-50,00	546,48	4,97
45,00	0,07	5,00	0,50	0,50	42,50	40,00	-50,00	-0,34	546,65	0,03
46,00	0,00	0,00	0,50	0,00	40,00	40,00	-0,34	-50,00	546,65	-4,97
47,00	9,93	5,00	0,00	0,50	40,00	37,50	-50,00	-0,34	571,48	9,90
48,00	0,07	0,00	0,50	0,00	37,50	37,50	-0,34	-50,00	571,48	-4,90
49,00	9,93	5,00	0,00	0,50	37,50	35,00	-50,00	-0,34	596,32	9,90
50,00	0,07	0,00	0,50	0,00	35,00	35,00	-0,34	-50,00	596,32	-4,90
51,00	9,93	5,00	0,00	0,50	35,00	32,50	-50,00	-0,34	621,15	9,90
52,00	0,07	0,00	0,50	0,00	32,50	32,50	-0,34	-50,00	621,15	-4,90
53,00	9,93	5,00	0,00	0,50	32,50	30,00	-50,00	-0,34	645,98	9,90
54,00	0,07	0,00	0,50	0,00	30,00	30,00	-0,34	-50,00	645,98	-4,90
55,00	9,93	5,00	0,00	0,50	30,00	27,50	-50,00	-0,34	670,81	9,90
56,00	0,07	0,00	0,50	0,00	27,50	27,50	-0,34	-50,00	670,81	-4,90
57,00	9,93	5,00	0,00	0,50	27,50	25,00	-50,00	-0,34	695,65	9,90
58,00	0,07	0,00	0,50	0,00	25,00	25,00	-0,34	-50,00	695,65	-4,90
59,00	9,93	5,00	0,00	0,50	25,00	22,50	-50,00	-0,34	720,48	9,90
60,00	0,07	0,00	0,50	0,00	22,50	22,50	-0,34	-50,00	720,48	-4,90
61,00	9,93	5,00	0,00	0,50	22,50	20,00	-50,00	0,00	745,31	9,93

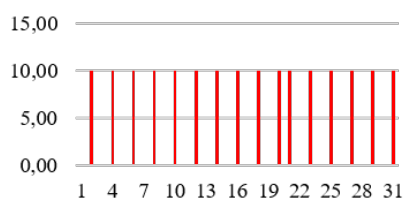
Taula 32: Simulacions en condicions 4 per $N=30$ i $T=0,25$. CAS 24

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	0,50	0,04	100,00	100,00	-2,07	-25,17	0,00	-2,31
1,00	9,18	5,00	0,04	0,46	100,00	98,75	-25,17	-2,07	11,47	8,99
2,00	0,75	0,00	0,46	0,04	98,75	98,75	-2,07	-25,17	11,47	-1,56
3,00	9,24	5,00	0,04	0,46	98,75	97,50	-25,17	-2,07	23,03	9,05
4,00	0,76	0,00	0,46	0,04	97,50	97,50	-2,07	-25,17	23,03	-1,55
5,00	9,24	5,00	0,04	0,46	97,50	96,25	-25,17	-2,07	34,58	9,05
6,00	0,76	0,00	0,46	0,04	96,25	96,25	-2,07	-25,17	34,58	-1,55
7,00	9,24	5,00	0,04	0,46	96,25	95,00	-25,17	-2,07	46,13	9,05
8,00	0,76	0,00	0,46	0,04	95,00	95,00	-2,07	-25,18	46,13	-1,55
9,00	9,24	5,00	0,04	0,46	95,00	93,75	-25,18	-2,22	57,68	9,04
10,00	0,76	0,00	0,46	0,04	93,75	93,75	-2,22	-27,07	57,68	-1,73
11,00	9,24	5,00	0,04	0,46	93,75	92,50	-27,07	-25,17	69,23	6,93
12,00	0,76	5,00	0,46	0,50	92,50	91,25	-25,17	-2,07	70,18	0,57
13,00	0,06	0,00	0,50	0,04	91,25	91,25	-2,07	-25,17	70,18	-2,25
14,00	9,18	5,00	0,04	0,46	91,25	90,00	-25,17	-2,07	81,66	8,99
15,00	0,75	0,00	0,46	0,04	90,00	90,00	-2,07	-25,18	81,66	-1,56
16,00	9,24	5,00	0,04	0,46	90,00	88,75	-25,18	-2,22	93,21	9,04
17,00	0,76	0,00	0,46	0,04	88,75	88,75	-2,22	-27,07	93,21	-1,73
18,00	9,24	5,00	0,04	0,46	88,75	87,50	-27,07	-25,17	104,76	6,93
19,00	0,76	5,00	0,46	0,50	87,50	86,25	-25,17	-2,07	105,71	0,57
20,00	0,06	0,00	0,50	0,04	86,25	86,25	-2,07	-25,17	105,71	-2,25
21,00	9,18	5,00	0,04	0,46	86,25	85,00	-25,17	-2,07	117,19	8,99
22,00	0,75	0,00	0,46	0,04	85,00	85,00	-2,07	-25,18	117,19	-1,56
23,00	9,24	5,00	0,04	0,46	85,00	83,75	-25,18	-2,22	128,74	9,04
24,00	0,76	0,00	0,46	0,04	83,75	83,75	-2,22	-27,07	128,74	-1,73
25,00	9,24	5,00	0,04	0,46	83,75	82,50	-27,07	-25,17	140,30	6,93
26,00	0,76	5,00	0,46	0,50	82,50	81,25	-25,17	-2,07	141,24	0,57
27,00	0,06	0,00	0,50	0,04	81,25	81,25	-2,07	-25,17	141,24	-2,25
28,00	9,18	5,00	0,04	0,46	81,25	80,00	-25,17	-2,07	152,72	8,99
29,00	0,75	0,00	0,46	0,04	80,00	80,00	-2,07	-25,17	152,72	-1,56
30,00	9,24	5,00	0,04	0,46	80,00	78,75	-25,17	-2,07	164,28	9,05
31,00	0,76	0,00	0,46	0,04	78,75	78,75	-2,07	-25,17	164,28	-1,55
32,00	9,24	5,00	0,04	0,46	78,75	77,50	-25,17	-2,07	175,83	9,05
33,00	0,76	0,00	0,46	0,04	77,50	77,50	-2,07	-25,17	175,83	-1,55
34,00	9,24	5,00	0,04	0,46	77,50	76,25	-25,17	-2,07	187,38	9,05
35,00	0,76	0,00	0,46	0,04	76,25	76,25	-2,07	-25,17	187,38	-1,55
36,00	9,24	5,00	0,04	0,46	76,25	75,00	-25,17	-2,07	198,93	9,05
37,00	0,76	0,00	0,46	0,04	75,00	75,00	-2,07	-25,17	198,93	-1,55
38,00	9,24	5,00	0,04	0,46	75,00	73,75	-25,17	-2,07	210,48	9,05
39,00	0,76	0,00	0,46	0,04	73,75	73,75	-2,07	-25,17	210,48	-1,55
40,00	9,24	5,00	0,04	0,46	73,75	72,50	-25,17	-2,07	222,03	9,05
41,00	0,76	0,00	0,46	0,04	72,50	72,50	-2,07	-25,17	222,03	-1,55
42,00	9,24	5,00	0,04	0,46	72,50	71,25	-25,17	-2,07	233,59	9,05
43,00	0,76	0,00	0,46	0,04	71,25	71,25	-2,07	-25,17	233,59	-1,55
44,00	9,24	5,00	0,04	0,46	71,25	70,00	-25,17	-2,07	245,14	9,05
45,00	0,76	0,00	0,46	0,04	70,00	70,00	-2,07	-25,17	245,14	-1,55
46,00	9,24	5,00	0,04	0,46	70,00	68,75	-25,17	-2,07	256,69	9,05
47,00	0,76	0,00	0,46	0,04	68,75	68,75	-2,07	-25,17	256,69	-1,55
48,00	9,24	5,00	0,04	0,46	68,75	67,50	-25,17	-2,07	268,24	9,05
49,00	0,76	0,00	0,46	0,04	67,50	67,50	-2,07	-25,17	268,24	-1,55
50,00	9,24	5,00	0,04	0,46	67,50	66,25	-25,17	-2,07	279,79	9,05
51,00	0,76	0,00	0,46	0,04	66,25	66,25	-2,07	-25,17	279,79	-1,55
52,00	9,24	5,00	0,04	0,46	66,25	65,00	-25,17	-2,07	291,34	9,05
53,00	0,76	0,00	0,46	0,04	65,00	65,00	-2,07	-25,17	291,34	-1,55
54,00	9,24	5,00	0,04	0,46	65,00	63,75	-25,17	-2,07	302,90	9,05
55,00	0,76	0,00	0,46	0,04	63,75	63,75	-2,07	-25,17	302,90	-1,55
56,00	9,24	5,00	0,04	0,46	63,75	62,50	-25,17	-2,07	314,45	9,05
57,00	0,76	0,00	0,46	0,04	62,50	62,50	-2,07	-25,17	314,45	-1,55
58,00	9,24	5,00	0,04	0,46	62,50	61,25	-25,17	-2,07	326,00	9,05
59,00	0,76	0,00	0,46	0,04	61,25	61,25	-2,07	-25,17	326,00	-1,55
60,00	9,24	5,00	0,04	0,46	61,25	60,00	-25,17	-2,07	337,55	9,05
61,00	0,76	0,00	0,46	0,04	60,00	60,00	-2,07	-25,18	337,55	-1,55
62,00	9,24	5,00	0,04	0,46	60,00	58,75	-25,18	-2,22	349,10	9,04

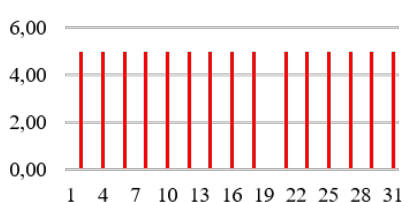
n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	λ_2 (n)	λ_2 (n+1)	B(n)	σ
63,00	0,76	0,00	0,46	0,04	58,75	58,75	-2,22	-27,07	349,10	-1,73
64,00	9,24	5,00	0,04	0,46	58,75	57,50	-27,07	-25,17	360,66	6,93
65,00	0,76	5,00	0,46	0,50	57,50	56,25	-25,17	-2,07	361,60	0,57
66,00	0,06	0,00	0,50	0,04	56,25	56,25	-2,07	-25,17	361,60	-2,25
67,00	9,18	5,00	0,04	0,46	56,25	55,00	-25,17	-2,07	373,08	8,99
68,00	0,75	0,00	0,46	0,04	55,00	55,00	-2,07	-25,17	373,08	-1,56
69,00	9,24	5,00	0,04	0,46	55,00	53,75	-25,17	-2,07	384,64	9,05
70,00	0,76	0,00	0,46	0,04	53,75	53,75	-2,07	-25,17	384,64	-1,55
71,00	9,24	5,00	0,04	0,46	53,75	52,50	-25,17	-2,07	396,19	9,05
72,00	0,76	0,00	0,46	0,04	52,50	52,50	-2,07	-25,17	396,19	-1,55
73,00	9,24	5,00	0,04	0,46	52,50	51,25	-25,17	-2,07	407,74	9,05
74,00	0,76	0,00	0,46	0,04	51,25	51,25	-2,07	-25,17	407,74	-1,55
75,00	9,24	5,00	0,04	0,46	51,25	50,00	-25,17	-2,07	419,29	9,05
76,00	0,76	0,00	0,46	0,04	50,00	50,00	-2,07	-25,18	419,29	-1,55
77,00	9,24	5,00	0,04	0,46	50,00	48,75	-25,18	-2,22	430,84	9,04
78,00	0,76	0,00	0,46	0,04	48,75	48,75	-2,22	-27,07	430,84	-1,73
79,00	9,24	5,00	0,04	0,46	48,75	47,50	-27,07	-25,18	442,39	6,93
80,00	0,76	5,00	0,46	0,50	47,50	46,25	-25,18	-2,22	443,34	0,55
81,00	0,06	0,00	0,50	0,04	46,25	46,25	-2,22	-27,07	443,34	-2,42
82,00	9,18	5,00	0,04	0,46	46,25	45,00	-27,07	-25,17	454,82	6,87
83,00	0,75	5,00	0,46	0,50	45,00	43,75	-25,17	-2,07	455,77	0,56
84,00	0,06	0,00	0,50	0,04	43,75	43,75	-2,07	-25,17	455,77	-2,25
85,00	9,18	5,00	0,04	0,46	43,75	42,50	-25,17	-2,07	467,25	8,99
86,00	0,75	0,00	0,46	0,04	42,50	42,50	-2,07	-25,17	467,25	-1,56
87,00	9,24	5,00	0,04	0,46	42,50	41,25	-25,17	-2,07	478,80	9,05
88,00	0,76	0,00	0,46	0,04	41,25	41,25	-2,07	-25,18	478,80	-1,55
89,00	9,24	5,00	0,04	0,46	41,25	40,00	-25,18	-2,22	490,35	9,04
90,00	0,76	0,00	0,46	0,04	40,00	40,00	-2,22	-27,07	490,35	-1,73
91,00	9,24	5,00	0,04	0,46	40,00	38,75	-27,07	-25,17	501,90	6,93
92,00	0,76	5,00	0,46	0,50	38,75	37,50	-25,17	-2,07	502,85	0,57
93,00	0,06	0,00	0,50	0,04	37,50	37,50	-2,07	-25,17	502,85	-2,25
94,00	9,18	5,00	0,04	0,46	37,50	36,25	-25,17	-2,07	514,33	8,99
95,00	0,75	0,00	0,46	0,04	36,25	36,25	-2,07	-25,17	514,33	-1,56
96,00	9,24	5,00	0,04	0,46	36,25	35,00	-25,17	-2,07	525,88	9,05
97,00	0,76	0,00	0,46	0,04	35,00	35,00	-2,07	-25,17	525,88	-1,55
98,00	9,24	5,00	0,04	0,46	35,00	33,75	-25,17	-2,07	537,43	9,05
99,00	0,76	0,00	0,46	0,04	33,75	33,75	-2,07	-25,18	537,43	-1,55
100,00	9,24	5,00	0,04	0,46	33,75	32,50	-25,18	-2,22	548,98	9,04
101,00	0,76	0,00	0,46	0,04	32,50	32,50	-2,22	-27,07	548,98	-1,73
102,00	9,24	5,00	0,04	0,46	32,50	31,25	-27,07	-25,17	560,54	6,93
103,00	0,76	5,00	0,46	0,50	31,25	30,00	-25,17	-2,07	561,48	0,57
104,00	0,06	0,00	0,50	0,04	30,00	30,00	-2,07	-25,17	561,48	-2,25
105,00	9,18	5,00	0,04	0,46	30,00	28,75	-25,17	-2,07	572,96	8,99
106,00	0,75	0,00	0,46	0,04	28,75	28,75	-2,07	-25,18	572,96	-1,56
107,00	9,24	5,00	0,04	0,46	28,75	27,50	-25,18	-2,22	584,52	9,04
108,00	0,76	0,00	0,46	0,04	27,50	27,50	-2,22	-27,07	584,52	-1,73
109,00	9,24	5,00	0,04	0,46	27,50	26,25	-27,07	-25,17	596,07	6,93
110,00	0,76	5,00	0,46	0,50	26,25	25,00	-25,17	-2,07	597,02	0,57
111,00	0,06	0,00	0,50	0,04	25,00	25,00	-2,07	-25,18	597,02	-2,25
112,00	9,18	5,00	0,04	0,46	25,00	23,75	-25,18	-2,22	608,50	8,98
113,00	0,75	0,00	0,46	0,04	23,75	23,75	-2,22	-27,07	608,50	-1,73
114,00	9,24	5,00	0,04	0,46	23,75	22,50	-27,07	-25,17	620,05	6,93
115,00	0,76	5,00	0,46	0,50	22,50	21,25	-25,17	-2,07	621,00	0,57
116,00	0,06	0,00	0,50	0,04	21,25	21,25	-2,07	-25,17	621,00	-2,25
117,00	9,18	5,00	0,04	0,46	21,25	20,00	-25,17	-2,07	632,48	8,99
118,00	0,75	0,00	0,46	0,04	20,00	20,00	-2,07	-25,17	632,48	-1,56
119,00	9,24	5,00	0,04	0,46	20,00	18,75	-25,17	-2,07	644,03	9,05
120,00	0,76	0,00	0,46	0,04	18,75	18,75	-2,07	-25,17	644,03	-1,55
121,00	9,24	5,00	0,04	0,46	18,75	17,50	-25,17	-2,05	655,58	9,05
122,00	0,76	0,00	0,46	0,04	17,50	17,50	-2,05	-25,00	655,58	-1,54
123,00	9,24	5,00	0,04	0,46	17,50	16,25	-25,00	0,00	667,13	9,24

T
Cas 8

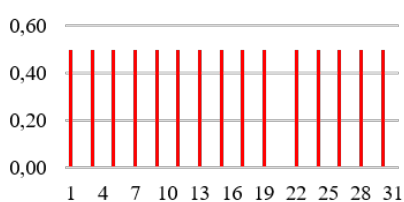
$p(n)$



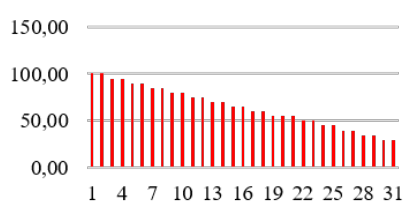
$u(n)$



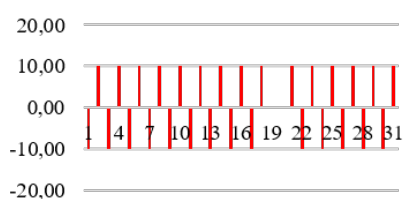
$q(n)$



$x(n)$

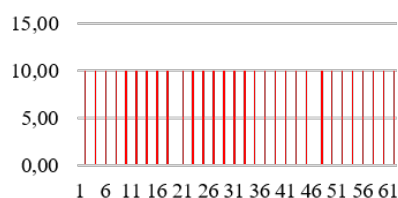


$\sigma(n)$

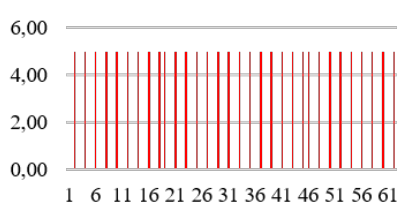


T/2
Cas 16

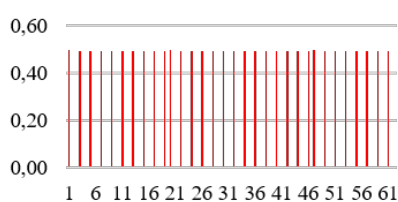
$p(n)$



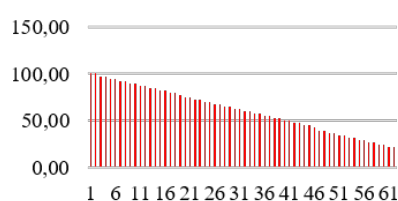
$u(n)$



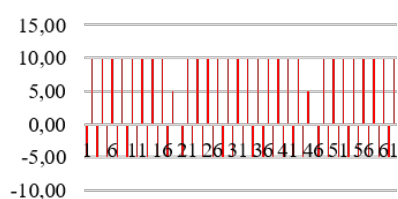
$q(n)$



$x(n)$

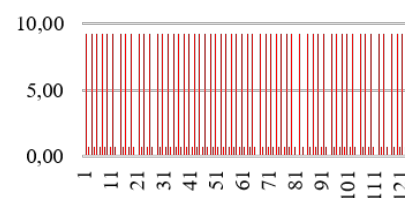


$\sigma(n)$

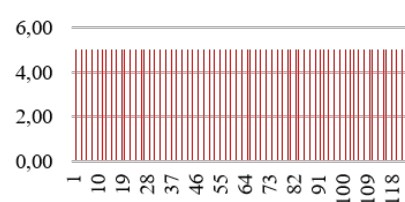


T/4
Cas 24

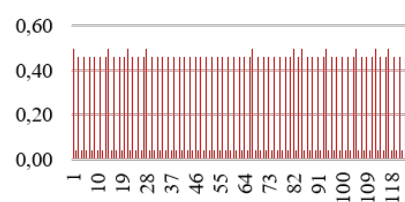
$p(n)$



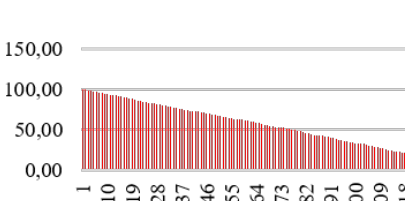
$u(n)$



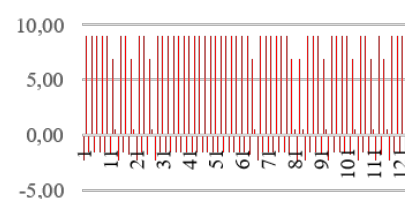
$q(n)$



$x(n)$



$\sigma(n)$



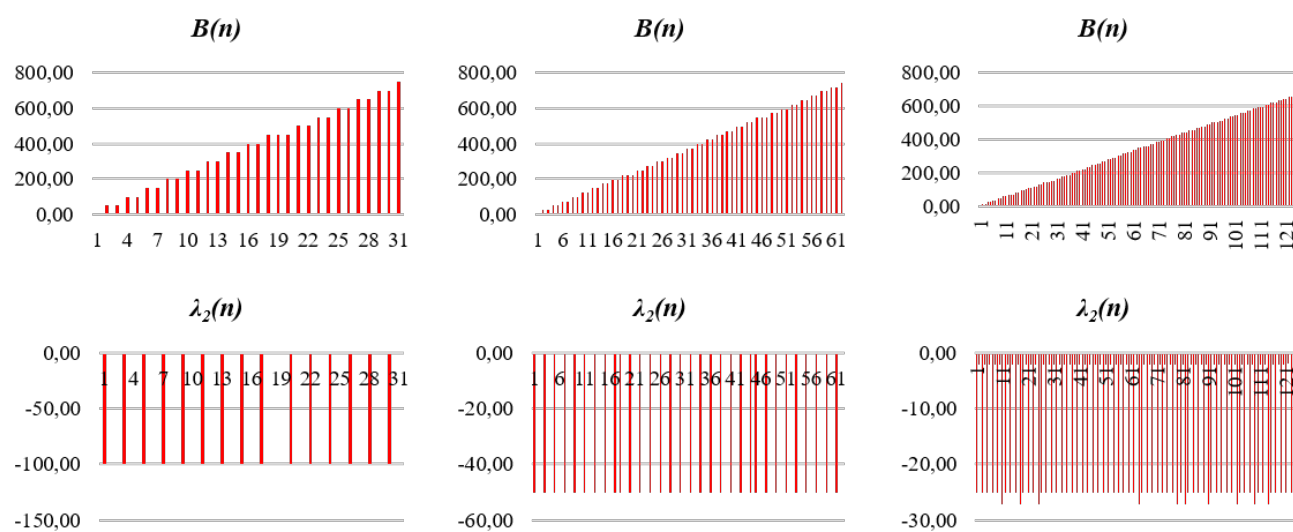


Figura 27: Representació gràfica simulació casos 8, 16 i 24

2. Simulació i representació gràfica de les simulacions en temps discret (bloc petit)

En aquest bloc més petit s'han duit a terme 5 simulacions, mantenint les condicions esmentades a la taula de dalt i augmentant el nombre d'iteracions en cada simulació. Aleshores, aplicant la fórmula $N' = N + 1$ per duplicar el nombre d'iteracions en temps discret, el nombre total de mostres en cada període ha estat de:

	CAS 25	CAS 26	CAS 27	CAS 28	CAS 29
N	10	21	43	87	175

Condicions 1

En aquest apartat es mostren tant les simulacions com la representació gràfica d'aquestes per les **condicions 1** del problema.

x_0	p_m	u_m	ρ	Q_m	Q_0	m
100	10	5	5	1	1	10

Primer es mostra el cas **N=10**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per un període total igual a 1 i a continuació la representació gràfica d'aquestes.

Taula 33: Simulacions en condicions 1 per $N=10$ i $T=1$. CAS 25

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	45,24	100,00	100,00	-2,88	-3,18	0,00	-3,02
1,00	0,95	0,00	45,24	40,94	100,00	100,00	-3,18	-3,51	0,00	-2,39
2,00	1,81	0,00	40,94	37,04	100,00	100,00	-3,51	-3,88	0,00	-1,88
3,00	2,59	0,00	37,04	33,52	100,00	100,00	-3,88	-4,29	0,00	-1,49
4,00	3,30	0,00	33,52	30,33	100,00	100,00	-4,29	-4,74	0,00	-1,22
5,00	3,93	5,00	30,33	32,20	100,00	95,00	-4,74	-4,13	19,67	0,00
6,00	3,56	5,00	32,20	33,89	95,00	90,00	-4,13	-3,46	37,47	0,26
7,00	3,22	5,00	33,89	35,43	90,00	85,00	-3,46	-2,72	53,58	0,63
8,00	2,91	5,00	35,43	36,81	85,00	80,00	-2,72	-1,90	68,16	1,10
9,00	2,64	5,00	36,81	38,07	80,00	75,00	-1,90	-1,00	81,34	1,69
10,00	2,39	5,00	38,07	39,20	75,00	70,00	-1,00	0,00	93,28	2,39

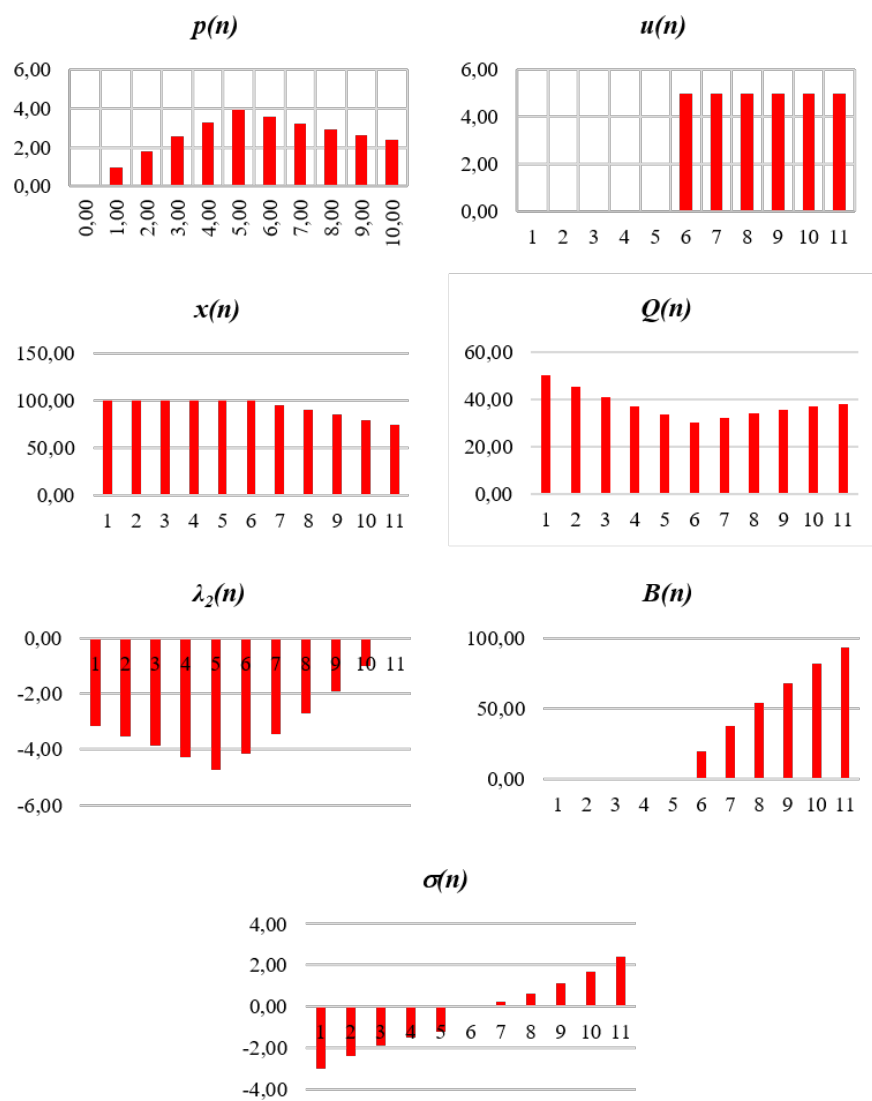


Figura 28: Representació gràfica simulació cas 25

Després es mostra el cas **N=21**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per un període total igual a 1 i a continuació la representació gràfica d'aquestes.

Taula 34: *Simulacions en condicions 1 per N=21 i T=1. CAS 26*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	47,56	100,00	100,00	-2,50	-2,63	0,00	-1,28
1,00	0,49	0,00	47,56	45,24	100,00	100,00	-2,63	-2,77	0,00	-1,10
2,00	0,95	0,00	45,24	43,04	100,00	100,00	-2,77	-2,91	0,00	-0,94
3,00	1,39	0,00	43,04	40,94	100,00	100,00	-2,91	-3,06	0,00	-0,79
4,00	1,81	0,00	40,94	38,94	100,00	100,00	-3,06	-3,21	0,00	-0,66
5,00	2,21	0,00	38,94	37,04	100,00	100,00	-3,21	-3,38	0,00	-0,54
6,00	2,59	0,00	37,04	35,23	100,00	100,00	-3,38	-3,55	0,00	-0,44
7,00	2,95	0,00	35,23	33,52	100,00	100,00	-3,55	-3,73	0,00	-0,34
8,00	3,30	0,00	33,52	31,88	100,00	100,00	-3,73	-3,92	0,00	-0,27
9,00	3,62	0,00	31,88	30,33	100,00	100,00	-3,92	-4,13	0,00	-0,20
10,00	3,93	0,00	30,33	28,85	100,00	100,00	-4,13	-4,34	0,00	-0,15
11,00	4,23	5,00	28,85	29,88	100,00	97,50	-4,34	-4,03	10,58	0,15
12,00	4,02	5,00	29,88	30,86	97,50	95,00	-4,03	-3,72	20,64	0,20
13,00	3,83	5,00	30,86	31,79	95,00	92,50	-3,72	-3,38	30,21	0,27
14,00	3,64	5,00	31,79	32,68	92,50	90,00	-3,38	-3,03	39,31	0,34
15,00	3,46	5,00	32,68	33,53	90,00	87,50	-3,03	-2,66	47,97	0,44
16,00	3,29	5,00	33,53	34,33	87,50	85,00	-2,66	-2,27	56,21	0,54
17,00	3,13	5,00	34,33	35,09	85,00	82,50	-2,27	-1,86	64,04	0,66
18,00	2,98	5,00	35,09	35,82	82,50	80,00	-1,86	-1,43	71,49	0,79
19,00	2,84	5,00	35,82	36,51	80,00	77,50	-1,43	-0,98	78,58	0,94
20,00	2,70	5,00	36,51	37,17	77,50	75,00	-0,98	-0,50	85,33	1,10
21,00	2,57	5,00	37,17	37,80	75,00	72,50	-0,50	0,00	91,74	1,28

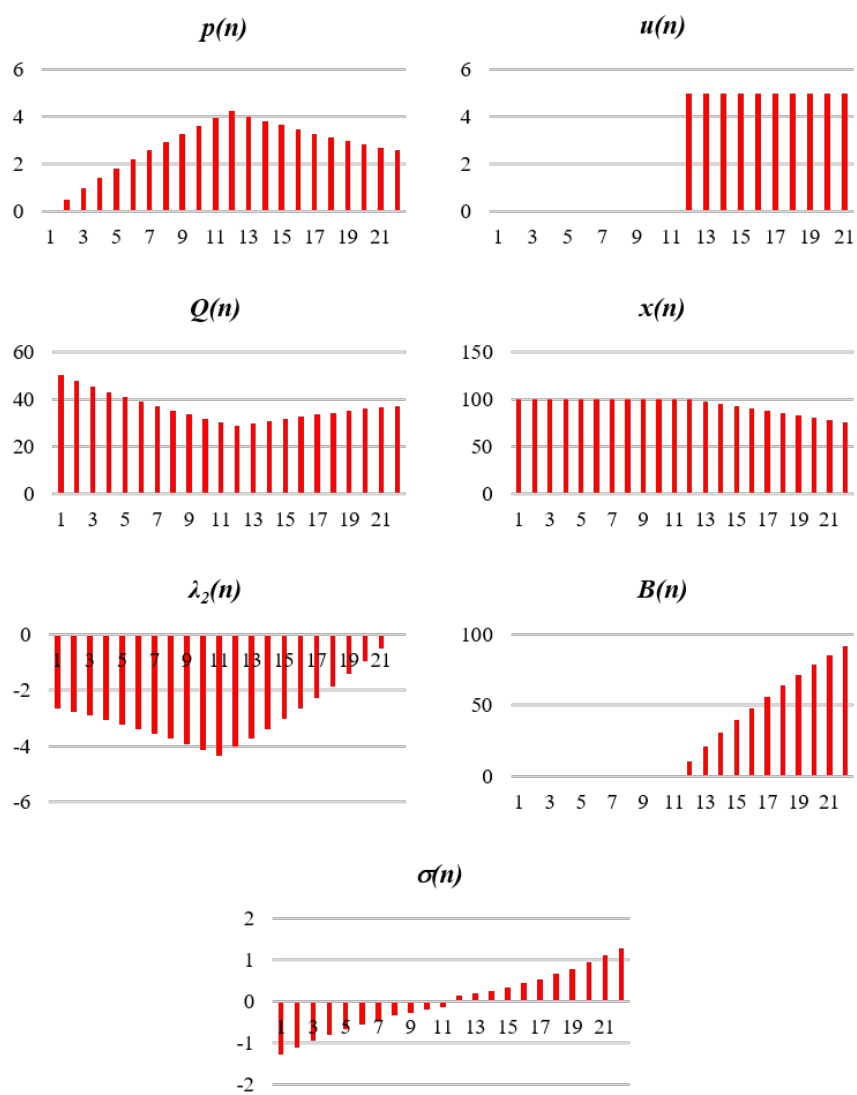


Figura 29: Representació gràfica simulació cas 26

Aquí es mostra el cas **N=43**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per un període total igual a 1 i a continuació la representació gràfica d'aquestes.

Taula 35: *Simulacions en condicions 1 per N=43 i T=1. CAS 27*

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	48,77	100,00	100,00	-2,47	-2,53	0,00	-0,63
1,00	0,25	0,00	48,77	47,56	100,00	100,00	-2,53	-2,60	0,00	-0,58
2,00	0,49	0,00	47,56	46,39	100,00	100,00	-2,60	-2,66	0,00	-0,54
3,00	0,72	0,00	46,39	45,24	100,00	100,00	-2,66	-2,73	0,00	-0,49
4,00	0,95	0,00	45,24	44,12	100,00	100,00	-2,73	-2,80	0,00	-0,45
5,00	1,18	0,00	44,12	43,04	100,00	100,00	-2,80	-2,87	0,00	-0,42
6,00	1,39	0,00	43,04	41,97	100,00	100,00	-2,87	-2,94	0,00	-0,38
7,00	1,61	0,00	41,97	40,94	100,00	100,00	-2,94	-3,02	0,00	-0,34
8,00	1,81	0,00	40,94	39,93	100,00	100,00	-3,02	-3,10	0,00	-0,31
9,00	2,01	0,00	39,93	38,94	100,00	100,00	-3,10	-3,17	0,00	-0,28
10,00	2,21	0,00	38,94	37,98	100,00	100,00	-3,17	-3,25	0,00	-0,25
11,00	2,40	0,00	37,98	37,04	100,00	100,00	-3,25	-3,34	0,00	-0,22
12,00	2,59	0,00	37,04	36,13	100,00	100,00	-3,34	-3,42	0,00	-0,20
13,00	2,77	0,00	36,13	35,23	100,00	100,00	-3,42	-3,51	0,00	-0,17
14,00	2,95	0,00	35,23	34,36	100,00	100,00	-3,51	-3,60	0,00	-0,15
15,00	3,13	0,00	34,36	33,52	100,00	100,00	-3,60	-3,69	0,00	-0,13
16,00	3,30	0,00	33,52	32,69	100,00	100,00	-3,69	-3,78	0,00	-0,11
17,00	3,46	0,00	32,69	31,88	100,00	100,00	-3,78	-3,88	0,00	-0,09
18,00	3,62	0,00	31,88	31,09	100,00	100,00	-3,88	-3,97	0,00	-0,08
19,00	3,78	0,00	31,09	30,33	100,00	100,00	-3,97	-4,07	0,00	-0,06
20,00	3,93	0,00	30,33	29,58	100,00	100,00	-4,07	-4,18	0,00	-0,05
21,00	4,08	0,00	29,58	28,85	100,00	100,00	-4,18	-4,28	0,00	-0,04
22,00	4,23	5,00	28,85	29,37	100,00	98,75	-4,28	-4,14	5,29	0,04
23,00	4,13	5,00	29,37	29,88	98,75	97,50	-4,14	-3,98	10,45	0,05
24,00	4,02	5,00	29,88	30,38	97,50	96,25	-3,98	-3,83	15,48	0,06
25,00	3,92	5,00	30,38	30,86	96,25	95,00	-3,83	-3,67	20,38	0,08
26,00	3,83	5,00	30,86	31,33	95,00	93,75	-3,67	-3,51	25,17	0,09
27,00	3,73	5,00	31,33	31,79	93,75	92,50	-3,51	-3,34	29,83	0,11
28,00	3,64	5,00	31,79	32,24	92,50	91,25	-3,34	-3,17	34,39	0,13
29,00	3,55	5,00	32,24	32,68	91,25	90,00	-3,17	-2,99	38,82	0,15
30,00	3,46	5,00	32,68	33,11	90,00	88,75	-2,99	-2,81	43,15	0,17
31,00	3,38	5,00	33,11	33,53	88,75	87,50	-2,81	-2,62	47,38	0,20
32,00	3,29	5,00	33,53	33,93	87,50	86,25	-2,62	-2,43	51,49	0,22
33,00	3,21	5,00	33,93	34,33	86,25	85,00	-2,43	-2,24	55,51	0,25
34,00	3,13	5,00	34,33	34,72	85,00	83,75	-2,24	-2,04	59,43	0,28
35,00	3,06	5,00	34,72	35,09	83,75	82,50	-2,04	-1,84	63,25	0,31
36,00	2,98	5,00	35,09	35,46	82,50	81,25	-1,84	-1,63	66,98	0,34
37,00	2,91	5,00	35,46	35,82	81,25	80,00	-1,63	-1,41	70,61	0,38
38,00	2,84	5,00	35,82	36,17	80,00	78,75	-1,41	-1,19	74,16	0,42
39,00	2,77	5,00	36,17	36,51	78,75	77,50	-1,19	-0,96	77,61	0,45
40,00	2,70	5,00	36,51	36,85	77,50	76,25	-0,96	-0,73	80,98	0,49
41,00	2,63	5,00	36,85	37,17	76,25	75,00	-0,73	-0,49	84,27	0,54
42,00	2,57	5,00	37,17	37,49	75,00	73,75	-0,49	-0,25	87,48	0,58
43,00	2,50	5,00	37,49	37,80	73,75	72,50	-0,25	0,00	90,61	0,63

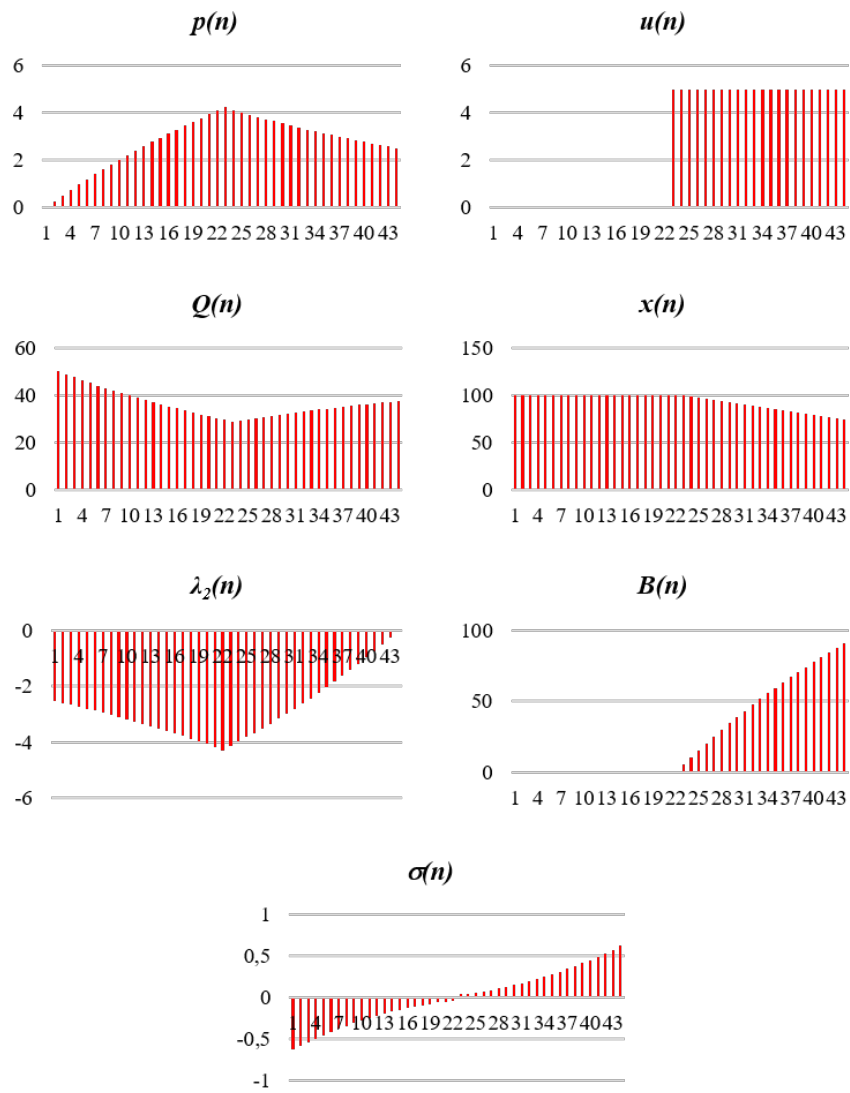


Figura 30: Representació gràfica simulació cas 27

Es continua amb el cas **N=87**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per un període total igual a 1 i a continuació la representació gràfica d'aquestes.

Taula 36: Simulacions en condicions 1 per $N=87$ i $T=1$. CAS 28

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	49,38	100,00	100,00	-2,46	-2,49	0,00	-0,31
1,00	0,12	0,00	49,38	48,77	100,00	100,00	-2,49	-2,52	0,00	-0,30
2,00	0,25	0,00	48,77	48,16	100,00	100,00	-2,52	-2,55	0,00	-0,29
3,00	0,37	0,00	48,16	47,56	100,00	100,00	-2,55	-2,58	0,00	-0,27
4,00	0,49	0,00	47,56	46,97	100,00	100,00	-2,58	-2,61	0,00	-0,26
5,00	0,61	0,00	46,97	46,39	100,00	100,00	-2,61	-2,65	0,00	-0,25
6,00	0,72	0,00	46,39	45,81	100,00	100,00	-2,65	-2,68	0,00	-0,24
7,00	0,84	0,00	45,81	45,24	100,00	100,00	-2,68	-2,71	0,00	-0,23
8,00	0,95	0,00	45,24	44,68	100,00	100,00	-2,71	-2,75	0,00	-0,22
9,00	1,06	0,00	44,68	44,12	100,00	100,00	-2,75	-2,78	0,00	-0,21
10,00	1,18	0,00	44,12	43,58	100,00	100,00	-2,78	-2,82	0,00	-0,20
11,00	1,28	0,00	43,58	43,04	100,00	100,00	-2,82	-2,85	0,00	-0,19
12,00	1,39	0,00	43,04	42,50	100,00	100,00	-2,85	-2,89	0,00	-0,18
13,00	1,50	0,00	42,50	41,97	100,00	100,00	-2,89	-2,93	0,00	-0,18
14,00	1,61	0,00	41,97	41,45	100,00	100,00	-2,93	-2,96	0,00	-0,17
15,00	1,71	0,00	41,45	40,94	100,00	100,00	-2,96	-3,00	0,00	-0,16
16,00	1,81	0,00	40,94	40,43	100,00	100,00	-3,00	-3,04	0,00	-0,15
17,00	1,91	0,00	40,43	39,93	100,00	100,00	-3,04	-3,08	0,00	-0,14
18,00	2,01	0,00	39,93	39,43	100,00	100,00	-3,08	-3,11	0,00	-0,14
19,00	2,11	0,00	39,43	38,94	100,00	100,00	-3,11	-3,15	0,00	-0,13
20,00	2,21	0,00	38,94	38,46	100,00	100,00	-3,15	-3,19	0,00	-0,12
21,00	2,31	0,00	38,46	37,98	100,00	100,00	-3,19	-3,23	0,00	-0,11
22,00	2,40	0,00	37,98	37,51	100,00	100,00	-3,23	-3,27	0,00	-0,11
23,00	2,50	0,00	37,51	37,04	100,00	100,00	-3,27	-3,32	0,00	-0,10
24,00	2,59	0,00	37,04	36,58	100,00	100,00	-3,32	-3,36	0,00	-0,09
25,00	2,68	0,00	36,58	36,13	100,00	100,00	-3,36	-3,40	0,00	-0,09
26,00	2,77	0,00	36,13	35,68	100,00	100,00	-3,40	-3,44	0,00	-0,08
27,00	2,86	0,00	35,68	35,23	100,00	100,00	-3,44	-3,49	0,00	-0,07
28,00	2,95	0,00	35,23	34,80	100,00	100,00	-3,49	-3,53	0,00	-0,07
29,00	3,04	0,00	34,80	34,36	100,00	100,00	-3,53	-3,57	0,00	-0,06
30,00	3,13	0,00	34,36	33,94	100,00	100,00	-3,57	-3,62	0,00	-0,06
31,00	3,21	0,00	33,94	33,52	100,00	100,00	-3,62	-3,66	0,00	-0,05
32,00	3,30	0,00	33,52	33,10	100,00	100,00	-3,66	-3,71	0,00	-0,05
33,00	3,38	0,00	33,10	32,69	100,00	100,00	-3,71	-3,76	0,00	-0,04
34,00	3,46	0,00	32,69	32,28	100,00	100,00	-3,76	-3,80	0,00	-0,04
35,00	3,54	0,00	32,28	31,88	100,00	100,00	-3,80	-3,85	0,00	-0,04
36,00	3,62	0,00	31,88	31,49	100,00	100,00	-3,85	-3,90	0,00	-0,03
37,00	3,70	0,00	31,49	31,09	100,00	100,00	-3,90	-3,95	0,00	-0,03
38,00	3,78	0,00	31,09	30,71	100,00	100,00	-3,95	-4,00	0,00	-0,02
39,00	3,86	0,00	30,71	30,33	100,00	100,00	-4,00	-4,05	0,00	-0,02
40,00	3,93	0,00	30,33	29,95	100,00	100,00	-4,05	-4,10	0,00	-0,02
41,00	4,01	0,00	29,95	29,58	100,00	100,00	-4,10	-4,15	0,00	-0,01
42,00	4,08	0,00	29,58	29,21	100,00	100,00	-4,15	-4,20	0,00	-0,01
43,00	4,16	0,00	29,21	28,85	100,00	100,00	-4,20	-4,26	0,00	-0,01
44,00	4,23	5,00	28,85	29,11	100,00	99,38	-4,26	-4,18	2,64	0,01
45,00	4,18	5,00	29,11	29,37	99,38	98,75	-4,18	-4,11	5,26	0,01
46,00	4,13	5,00	29,37	29,63	98,75	98,13	-4,11	-4,04	7,83	0,01
47,00	4,07	5,00	29,63	29,88	98,13	97,50	-4,04	-3,96	10,38	0,02
48,00	4,02	5,00	29,88	30,13	97,50	96,88	-3,96	-3,88	12,90	0,02
49,00	3,97	5,00	30,13	30,38	96,88	96,25	-3,88	-3,80	15,38	0,02
50,00	3,92	5,00	30,38	30,62	96,25	95,63	-3,80	-3,73	17,83	0,03
51,00	3,88	5,00	30,62	30,86	95,63	95,00	-3,73	-3,65	20,26	0,03
52,00	3,83	5,00	30,86	31,10	95,00	94,38	-3,65	-3,57	22,65	0,04
53,00	3,78	5,00	31,10	31,33	94,38	93,75	-3,57	-3,48	25,01	0,04
54,00	3,73	5,00	31,33	31,56	93,75	93,13	-3,48	-3,40	27,34	0,04
55,00	3,69	5,00	31,56	31,79	93,13	92,50	-3,40	-3,32	29,65	0,05
56,00	3,64	5,00	31,79	32,02	92,50	91,88	-3,32	-3,23	31,92	0,05
57,00	3,60	5,00	32,02	32,24	91,88	91,25	-3,23	-3,15	34,17	0,06
58,00	3,55	5,00	32,24	32,46	91,25	90,63	-3,15	-3,06	36,39	0,06
59,00	3,51	5,00	32,46	32,68	90,63	90,00	-3,06	-2,97	38,58	0,07
60,00	3,46	5,00	32,68	32,90	90,00	89,38	-2,97	-2,88	40,75	0,07
61,00	3,42	5,00	32,90	33,11	89,38	88,75	-2,88	-2,79	42,89	0,08
62,00	3,38	5,00	33,11	33,32	88,75	88,13	-2,79	-2,70	45,00	0,09
63,00	3,34	5,00	33,32	33,53	88,13	87,50	-2,70	-2,61	47,08	0,09
64,00	3,29	5,00	33,53	33,73	87,50	86,88	-2,61	-2,51	49,14	0,10
65,00	3,25	5,00	33,73	33,93	86,88	86,25	-2,51	-2,42	51,18	0,11
66,00	3,21	5,00	33,93	34,13	86,25	85,63	-2,42	-2,32	53,18	0,11
67,00	3,17	5,00	34,13	34,33	85,63	85,00	-2,32	-2,23	55,17	0,12
68,00	3,13	5,00	34,33	34,52	85,00	84,38	-2,23	-2,13	57,13	0,13
69,00	3,10	5,00	34,52	34,72	84,38	83,75	-2,13	-2,03	59,06	0,14
70,00	3,06	5,00	34,72	34,91	83,75	83,13	-2,03	-1,93	60,97	0,14
71,00	3,02	5,00	34,91	35,09	83,13	82,50	-1,93	-1,82	62,86	0,15
72,00	2,98	5,00	35,09	35,28	82,50	81,88	-1,82	-1,72	64,72	0,16
73,00	2,94	5,00	35,28	35,46	81,88	81,25	-1,72	-1,62	66,56	0,17
74,00	2,91	5,00	35,46	35,64	81,25	80,63	-1,62	-1,51	68,38	0,18
75,00	2,87	5,00	35,64	35,82	80,63	80,00	-1,51	-1,40	70,17	0,18
76,00	2,84	5,00	35,82	36,00	80,00	79,38	-1,40	-1,29	71,94	0,19
77,00	2,80	5,00	36,00	36,17	79,38	78,75	-1,29	-1,18	73,70	0,20
78,00	2,77	5,00	36,17	36,34	78,75	78,13	-1,18	-1,07	75,42	0,21
79,00	2,73	5,00	36,34	36,51	78,13	77,50	-1,07	-0,96	77,13	0,22
80,00	2,70	5,00	36,51	36,68	77,50	76,88	-0,96	-0,84	78,82	0,23
81,00	2,66	5,00	36,68	36,85	76,88	76,25	-0,84	-0,73	80,48	0,24
82,00	2,63	5,00	36,85	37,01	76,25	75,63	-0,73	-0,61	82,13	0,25
83,00	2,60	5,00	37,01	37,17	75,63	75,00	-0,61	-0,49	83,75	0,26
84,00	2,57	5,00	37,17	37,33	75,00	74,38	-0,49	-0,37	85,35	0,27
85,00	2,53	5,00	37,33	37,49	74,38	73,75	-0,37	-0,25	86,94	0,29
86,00	2,50	5,00	37,49	37,64	73,75	73,13	-0,25	-0,13	88,50	0,30
87,00	2,47	5,00	37,64	37,80	73,13	72,50	-0,13	0,00	90,05	0,31

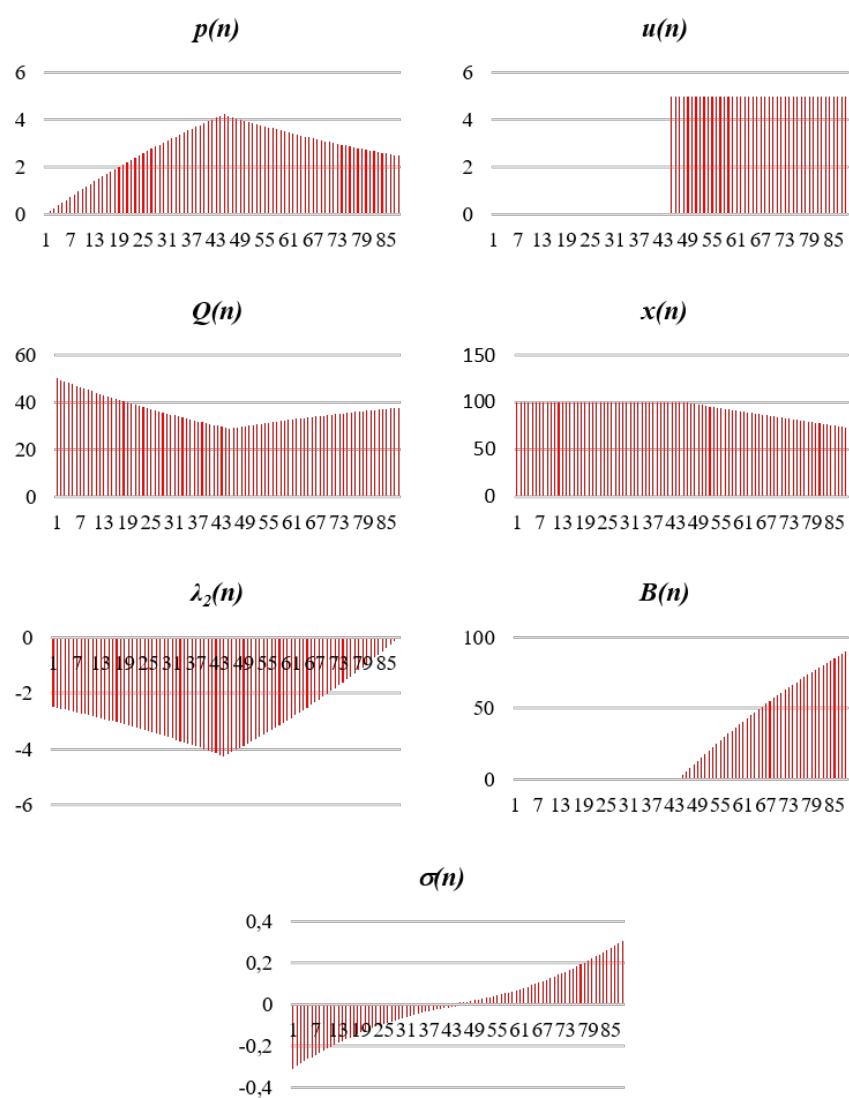


Figura 31: Representació gràfica simulació cas 28

Finalment es representa el cas **N=175**. En les taules de sota es mostren els resultats numèrics de les simulacions per un període total igual a 1 i a continuació la representació gràfica d'aquestes.

Taula 37: Simulacions en condicions 1 per $N=175$ i $T=1$. CAS 29

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
0,00	0,00	0,00	50,00	49,69	100,00	100,00	-2,45	-2,46	0,00	-0,15
1,00	0,06	0,00	49,69	49,38	100,00	100,00	-2,46	-2,48	0,00	-0,15
2,00	0,12	0,00	49,38	49,07	100,00	100,00	-2,48	-2,49	0,00	-0,15
3,00	0,19	0,00	49,07	48,77	100,00	100,00	-2,49	-2,51	0,00	-0,14
4,00	0,25	0,00	48,77	48,46	100,00	100,00	-2,51	-2,53	0,00	-0,14
5,00	0,31	0,00	48,46	48,16	100,00	100,00	-2,53	-2,54	0,00	-0,14
6,00	0,37	0,00	48,16	47,86	100,00	100,00	-2,54	-2,56	0,00	-0,14
7,00	0,43	0,00	47,86	47,56	100,00	100,00	-2,56	-2,57	0,00	-0,13
8,00	0,49	0,00	47,56	47,27	100,00	100,00	-2,57	-2,59	0,00	-0,13
9,00	0,55	0,00	47,27	46,97	100,00	100,00	-2,59	-2,61	0,00	-0,13
10,00	0,61	0,00	46,97	46,68	100,00	100,00	-2,61	-2,62	0,00	-0,13
11,00	0,66	0,00	46,68	46,39	100,00	100,00	-2,62	-2,64	0,00	-0,12
12,00	0,72	0,00	46,39	46,10	100,00	100,00	-2,64	-2,66	0,00	-0,12
13,00	0,78	0,00	46,10	45,81	100,00	100,00	-2,66	-2,67	0,00	-0,12
14,00	0,84	0,00	45,81	45,53	100,00	100,00	-2,67	-2,69	0,00	-0,12
15,00	0,89	0,00	45,53	45,24	100,00	100,00	-2,69	-2,71	0,00	-0,11
16,00	0,95	0,00	45,24	44,96	100,00	100,00	-2,71	-2,72	0,00	-0,11
17,00	1,01	0,00	44,96	44,68	100,00	100,00	-2,72	-2,74	0,00	-0,11
18,00	1,06	0,00	44,68	44,40	100,00	100,00	-2,74	-2,76	0,00	-0,11
19,00	1,12	0,00	44,40	44,12	100,00	100,00	-2,76	-2,77	0,00	-0,10
20,00	1,18	0,00	44,12	43,85	100,00	100,00	-2,77	-2,79	0,00	-0,10
21,00	1,23	0,00	43,85	43,58	100,00	100,00	-2,79	-2,81	0,00	-0,10
22,00	1,28	0,00	43,58	43,31	100,00	100,00	-2,81	-2,83	0,00	-0,10
23,00	1,34	0,00	43,31	43,04	100,00	100,00	-2,83	-2,84	0,00	-0,09
24,00	1,39	0,00	43,04	42,77	100,00	100,00	-2,84	-2,86	0,00	-0,09
25,00	1,45	0,00	42,77	42,50	100,00	100,00	-2,86	-2,88	0,00	-0,09
26,00	1,50	0,00	42,50	42,24	100,00	100,00	-2,88	-2,90	0,00	-0,09
27,00	1,55	0,00	42,24	41,97	100,00	100,00	-2,90	-2,92	0,00	-0,08
28,00	1,61	0,00	41,97	41,71	100,00	100,00	-2,92	-2,93	0,00	-0,08
29,00	1,66	0,00	41,71	41,45	100,00	100,00	-2,93	-2,95	0,00	-0,08
30,00	1,71	0,00	41,45	41,19	100,00	100,00	-2,95	-2,97	0,00	-0,08
31,00	1,76	0,00	41,19	40,94	100,00	100,00	-2,97	-2,99	0,00	-0,08
32,00	1,81	0,00	40,94	40,68	100,00	100,00	-2,99	-3,01	0,00	-0,07
33,00	1,86	0,00	40,68	40,43	100,00	100,00	-3,01	-3,03	0,00	-0,07
34,00	1,91	0,00	40,43	40,18	100,00	100,00	-3,03	-3,05	0,00	-0,07
35,00	1,96	0,00	40,18	39,93	100,00	100,00	-3,05	-3,07	0,00	-0,07
36,00	2,01	0,00	39,93	39,68	100,00	100,00	-3,07	-3,09	0,00	-0,07
37,00	2,06	0,00	39,68	39,43	100,00	100,00	-3,09	-3,10	0,00	-0,06
38,00	2,11	0,00	39,43	39,18	100,00	100,00	-3,10	-3,12	0,00	-0,06
39,00	2,16	0,00	39,18	38,94	100,00	100,00	-3,12	-3,14	0,00	-0,06
40,00	2,21	0,00	38,94	38,70	100,00	100,00	-3,14	-3,16	0,00	-0,06
41,00	2,26	0,00	38,70	38,46	100,00	100,00	-3,16	-3,18	0,00	-0,06
42,00	2,31	0,00	38,46	38,22	100,00	100,00	-3,18	-3,20	0,00	-0,06
43,00	2,36	0,00	38,22	37,98	100,00	100,00	-3,20	-3,22	0,00	-0,05
44,00	2,40	0,00	37,98	37,74	100,00	100,00	-3,22	-3,24	0,00	-0,05
45,00	2,45	0,00	37,74	37,51	100,00	100,00	-3,24	-3,26	0,00	-0,05
46,00	2,50	0,00	37,51	37,27	100,00	100,00	-3,26	-3,28	0,00	-0,05
47,00	2,55	0,00	37,27	37,04	100,00	100,00	-3,28	-3,31	0,00	-0,05
48,00	2,59	0,00	37,04	36,81	100,00	100,00	-3,31	-3,33	0,00	-0,05
49,00	2,64	0,00	36,81	36,58	100,00	100,00	-3,33	-3,35	0,00	-0,04
50,00	2,68	0,00	36,58	36,35	100,00	100,00	-3,35	-3,37	0,00	-0,04
51,00	2,73	0,00	36,35	36,13	100,00	100,00	-3,37	-3,39	0,00	-0,04
52,00	2,77	0,00	36,13	35,90	100,00	100,00	-3,39	-3,41	0,00	-0,04
53,00	2,82	0,00	35,90	35,68	100,00	100,00	-3,41	-3,43	0,00	-0,04
54,00	2,86	0,00	35,68	35,46	100,00	100,00	-3,43	-3,45	0,00	-0,04
55,00	2,91	0,00	35,46	35,23	100,00	100,00	-3,45	-3,47	0,00	-0,03
56,00	2,95	0,00	35,23	35,01	100,00	100,00	-3,47	-3,50	0,00	-0,03
57,00	3,00	0,00	35,01	34,80	100,00	100,00	-3,50	-3,52	0,00	-0,03
58,00	3,04	0,00	34,80	34,58	100,00	100,00	-3,52	-3,54	0,00	-0,03
59,00	3,08	0,00	34,58	34,36	100,00	100,00	-3,54	-3,56	0,00	-0,03
60,00	3,13	0,00	34,36	34,15	100,00	100,00	-3,56	-3,58	0,00	-0,03
61,00	3,17	0,00	34,15	33,94	100,00	100,00	-3,58	-3,61	0,00	-0,03
62,00	3,21	0,00	33,94	33,73	100,00	100,00	-3,61	-3,63	0,00	-0,03
63,00	3,25	0,00	33,73	33,52	100,00	100,00	-3,63	-3,65	0,00	-0,02
64,00	3,30	0,00	33,52	33,31	100,00	100,00	-3,65	-3,68	0,00	-0,02
65,00	3,34	0,00	33,31	33,10	100,00	100,00	-3,68	-3,70	0,00	-0,02
66,00	3,38	0,00	33,10	32,89	100,00	100,00	-3,70	-3,72	0,00	-0,02
67,00	3,42	0,00	32,89	32,69	100,00	100,00	-3,72	-3,75	0,00	-0,02
68,00	3,46	0,00	32,69	32,48	100,00	100,00	-3,75	-3,77	0,00	-0,02
69,00	3,50	0,00	32,48	32,28	100,00	100,00	-3,77	-3,79	0,00	-0,02
70,00	3,54	0,00	32,28	32,08	100,00	100,00	-3,79	-3,82	0,00	-0,02
71,00	3,58	0,00	32,08	31,88	100,00	100,00	-3,82	-3,84	0,00	-0,02
72,00	3,62	0,00	31,88	31,68	100,00	100,00	-3,84	-3,86	0,00	-0,01
73,00	3,66	0,00	31,68	31,49	100,00	100,00	-3,86	-3,89	0,00	-0,01
74,00	3,70	0,00	31,49	31,29	100,00	100,00	-3,89	-3,91	0,00	-0,01
75,00	3,74	0,00	31,29	31,09	100,00	100,00	-3,91	-3,94	0,00	-0,01
76,00	3,78	0,00	31,09	30,90	100,00	100,00	-3,94	-3,96	0,00	-0,01
77,00	3,82	0,00	30,90	30,71	100,00	100,00	-3,96	-3,99	0,00	-0,01
78,00	3,86	0,00	30,71	30,52	100,00	100,00	-3,99	-4,01	0,00	-0,01
79,00	3,90	0,00	30,52	30,33	100,00	100,00	-4,01	-4,04	0,00	-0,01
80,00	3,93	0,00	30,33	30,14	100,00	100,00	-4,04	-4,06	0,00	-0,01
81,00	3,97	0,00	30,14	29,95	100,00	100,00	-4,06	-4,09	0,00	-0,01
82,00	4,01	0,00	29,95	29,76	100,00	100,00	-4,09	-4,11	0,00	-0,01
83,00	4,05	0,00	29,76	29,58	100,00	100,00	-4,11	-4,14	0,00	0,00
84,00	4,08	0,00	29,58	29,39	100,00	100,00	-4,14	-4,16	0,00	0,00
85,00	4,12	0,00	29,39	29,21	100,00	100,00	-4,16	-4,19	0,00	0,00
86,00	4,16	0,00	29,21	29,03	100,00	100,00	-4,19	-4,22	0,00	0,00
87,00	4,19	0,00	29,03	28,85	100,00	100,00	-4,22	-4,24	0,00	0,00

n	p(n)	u(n)	Q(n)	Q(n+1)	x(n)	x(n+1)	$\lambda_2(n)$	$\lambda_2(n+1)$	B(n)	σ
88,00	4,23	5,00	28,85	28,98	100,00	99,69	-4,24	-4,21	1,32	0,00
89,00	4,20	5,00	28,98	29,11	99,69	99,38	-4,21	-4,17	2,64	0,00
90,00	4,18	5,00	29,11	29,24	99,38	99,06	-4,17	-4,13	3,94	0,00
91,00	4,15	5,00	29,24	29,37	99,06	98,75	-4,13	-4,10	5,24	0,00
92,00	4,13	5,00	29,37	29,50	98,75	98,44	-4,10	-4,06	6,53	0,00
93,00	4,10	5,00	29,50	29,63	98,44	98,13	-4,06	-4,02	7,81	0,01
94,00	4,07	5,00	29,63	29,75	98,13	97,81	-4,02	-3,98	9,08	0,01
95,00	4,05	5,00	29,75	29,88	97,81	97,50	-3,98	-3,95	10,35	0,01
96,00	4,02	5,00	29,88	30,00	97,50	97,19	-3,95	-3,91	11,61	0,01
97,00	4,00	5,00	30,00	30,13	97,19	96,88	-3,91	-3,87	12,86	0,01
98,00	3,97	5,00	30,13	30,25	96,88	96,56	-3,87	-3,83	14,10	0,01
99,00	3,95	5,00	30,25	30,38	96,56	96,25	-3,83	-3,79	15,33	0,01
100,00	3,92	5,00	30,38	30,50	96,25	95,94	-3,79	-3,75	16,56	0,01
101,00	3,90	5,00	30,50	30,62	95,94	95,63	-3,75	-3,71	17,78	0,01
102,00	3,88	5,00	30,62	30,74	95,63	95,31	-3,71	-3,67	18,99	0,01
103,00	3,85	5,00	30,74	30,86	95,31	95,00	-3,67	-3,64	20,19	0,01
104,00	3,83	5,00	30,86	30,98	95,00	94,69	-3,64	-3,59	21,39	0,02
105,00	3,80	5,00	30,98	31,10	94,69	94,38	-3,59	-3,55	22,58	0,02
106,00	3,78	5,00	31,10	31,22	94,38	94,06	-3,55	-3,51	23,76	0,02
107,00	3,76	5,00	31,22	31,33	94,06	93,75	-3,51	-3,47	24,93	0,02
108,00	3,73	5,00	31,33	31,45	93,75	93,44	-3,47	-3,43	26,10	0,02
109,00	3,71	5,00	31,45	31,56	93,44	93,13	-3,43	-3,39	27,26	0,02
110,00	3,69	5,00	31,56	31,68	93,13	92,81	-3,39	-3,35	28,41	0,02
111,00	3,66	5,00	31,68	31,79	92,81	92,50	-3,35	-3,31	29,56	0,02
112,00	3,64	5,00	31,79	31,91	92,50	92,19	-3,31	-3,26	30,69	0,02
113,00	3,62	5,00	31,91	32,02	92,19	91,88	-3,26	-3,22	31,82	0,03
114,00	3,60	5,00	32,02	32,13	91,88	91,56	-3,22	-3,18	32,95	0,03
115,00	3,57	5,00	32,13	32,24	91,56	91,25	-3,18	-3,14	34,07	0,03
116,00	3,55	5,00	32,24	32,35	91,25	90,94	-3,14	-3,09	35,17	0,03
117,00	3,53	5,00	32,35	32,46	90,94	90,63	-3,09	-3,05	36,28	0,03
118,00	3,51	5,00	32,46	32,57	90,63	90,31	-3,05	-3,01	37,37	0,03
119,00	3,49	5,00	32,57	32,68	90,31	90,00	-3,01	-2,96	38,46	0,03
120,00	3,46	5,00	32,68	32,79	90,00	89,69	-2,96	-2,92	39,55	0,03
121,00	3,44	5,00	32,79	32,90	89,69	89,38	-2,92	-2,87	40,62	0,04
122,00	3,42	5,00	32,90	33,00	89,38	89,06	-2,87	-2,83	41,69	0,04
123,00	3,40	5,00	33,00	33,11	89,06	88,75	-2,83	-2,78	42,75	0,04
124,00	3,38	5,00	33,11	33,21	88,75	88,44	-2,78	-2,74	43,81	0,04
125,00	3,36	5,00	33,21	33,32	88,44	88,13	-2,74	-2,69	44,86	0,04
126,00	3,34	5,00	33,32	33,42	88,13	87,81	-2,69	-2,65	45,90	0,04
127,00	3,32	5,00	33,42	33,53	87,81	87,50	-2,65	-2,60	46,94	0,05
128,00	3,29	5,00	33,53	33,63	87,50	87,19	-2,60	-2,55	47,97	0,05
129,00	3,27	5,00	33,63	33,73	87,19	86,88	-2,55	-2,51	48,99	0,05
130,00	3,25	5,00	33,73	33,83	86,88	86,56	-2,51	-2,46	50,01	0,05
131,00	3,23	5,00	33,83	33,93	86,56	86,25	-2,46	-2,41	51,02	0,05
132,00	3,21	5,00	33,93	34,03	86,25	85,94	-2,41	-2,36	52,02	0,05
133,00	3,19	5,00	34,03	34,13	85,94	85,63	-2,36	-2,32	53,02	0,06
134,00	3,17	5,00	34,13	34,23	85,63	85,31	-2,32	-2,27	54,01	0,06
135,00	3,15	5,00	34,23	34,33	85,31	85,00	-2,27	-2,22	54,99	0,06
136,00	3,13	5,00	34,33	34,43	85,00	84,69	-2,22	-2,17	55,97	0,06
137,00	3,11	5,00	34,43	34,52	84,69	84,38	-2,17	-2,12	56,95	0,06
138,00	3,10	5,00	34,52	34,62	84,38	84,06	-2,12	-2,07	57,91	0,06
139,00	3,08	5,00	34,62	34,72	84,06	83,75	-2,07	-2,02	58,88	0,07
140,00	3,06	5,00	34,72	34,81	83,75	83,44	-2,02	-1,97	59,83	0,07
141,00	3,04	5,00	34,81	34,91	83,44	83,13	-1,97	-1,92	60,78	0,07
142,00	3,02	5,00	34,91	35,00	83,13	82,81	-1,92	-1,87	61,72	0,07
143,00	3,00	5,00	35,00	35,09	82,81	82,50	-1,87	-1,82	62,66	0,07
144,00	2,98	5,00	35,09	35,19	82,50	82,19	-1,82	-1,77	63,59	0,08
145,00	2,96	5,00	35,19	35,28	82,19	81,88	-1,77	-1,72	64,52	0,08
146,00	2,94	5,00	35,28	35,37	81,88	81,56	-1,72	-1,66	65,44	0,08
147,00	2,93	5,00	35,37	35,46	81,56	81,25	-1,66	-1,61	66,35	0,08
148,00	2,91	5,00	35,46	35,55	81,25	80,94	-1,61	-1,56	67,26	0,08
149,00	2,89	5,00	35,55	35,64	80,94	80,63	-1,56	-1,50	68,16	0,09
150,00	2,87	5,00	35,64	35,73	80,63	80,31	-1,50	-1,45	69,06	0,09
151,00	2,85	5,00	35,73	35,82	80,31	80,00	-1,45	-1,40	69,95	0,09
152,00	2,84	5,00	35,82	35,91	80,00	79,69	-1,40	-1,34	70,84	0,09
153,00	2,82	5,00	35,91	36,00	79,69	79,38	-1,34	-1,29	71,72	0,10
154,00	2,80	5,00	36,00	36,08	79,38	79,06	-1,29	-1,23	72,60	0,10
155,00	2,78	5,00	36,08	36,17	79,06	78,75	-1,23	-1,18	73,47	0,10
156,00	2,77	5,00	36,17	36,26	78,75	78,44	-1,18	-1,12	74,33	0,10
157,00	2,75	5,00	36,26	36,34	78,44	78,13	-1,12	-1,07	75,19	0,11
158,00	2,73	5,00	36,34	36,43	78,13	77,81	-1,07	-1,01	76,04	0,11
159,00	2,71	5,00	36,43	36,51	77,81	77,50	-1,01	-0,95	76,89	0,11
160,00	2,70	5,00	36,51	36,60	77,50	77,19	-0,95	-0,90	77,73	0,11
161,00	2,68	5,00	36,60	36,68	77,19	76,88	-0,90	-0,84	78,57	0,12
162,00	2,66	5,00	36,68	36,76	76,88	76,56	-0,84	-0,78	79,40	0,12
163,00	2,65	5,00	36,76	36,85	76,56	76,25	-0,78	-0,72	80,23	0,12
164,00	2,63	5,00	36,85	36,93	76,25	75,94	-0,72	-0,67	81,05	0,12
165,00	2,61	5,00	36,93	37,01	75,94	75,63	-0,67	-0,61	81,87	0,13
166,00	2,60	5,00	37,01	37,09	75,63	75,31	-0,61	-0,55	82,68	0,13
167,00	2,58	5,00	37,09	37,17	75,31	75,00	-0,55	-0,49	83,49	0,13
168,00	2,57	5,00	37,17	37,25	75,00	74,69	-0,49	-0,43	84,29	0,13
169,00	2,55	5,00	37,25	37,33	74,69	74,38	-0,43	-0,37	85,09	0,14
170,00	2,53	5,00	37,33	37,41	74,38	74,06	-0,37	-0,31	85,88	0,14
171,00	2,52	5,00	37,41	37,49	74,06	73,75	-0,31	-0,25	86,67	0,14
172,00	2,50	5,00	37,49	37,57	73,75	73,44	-0,25	-0,19	87,45	0,14
173,00	2,49	5,00	37,57	37,64	73,44	73,13	-0,19	-0,12	88,23	0,15
174,00	2,47	5,00	37,64	37,72	73,13	72,81	-0,12	-0,06	89,00	0,15
175,00	2,46	5,00	37,72	37,80	72,81	72,50	-0,06	0,00	89,77	0,15

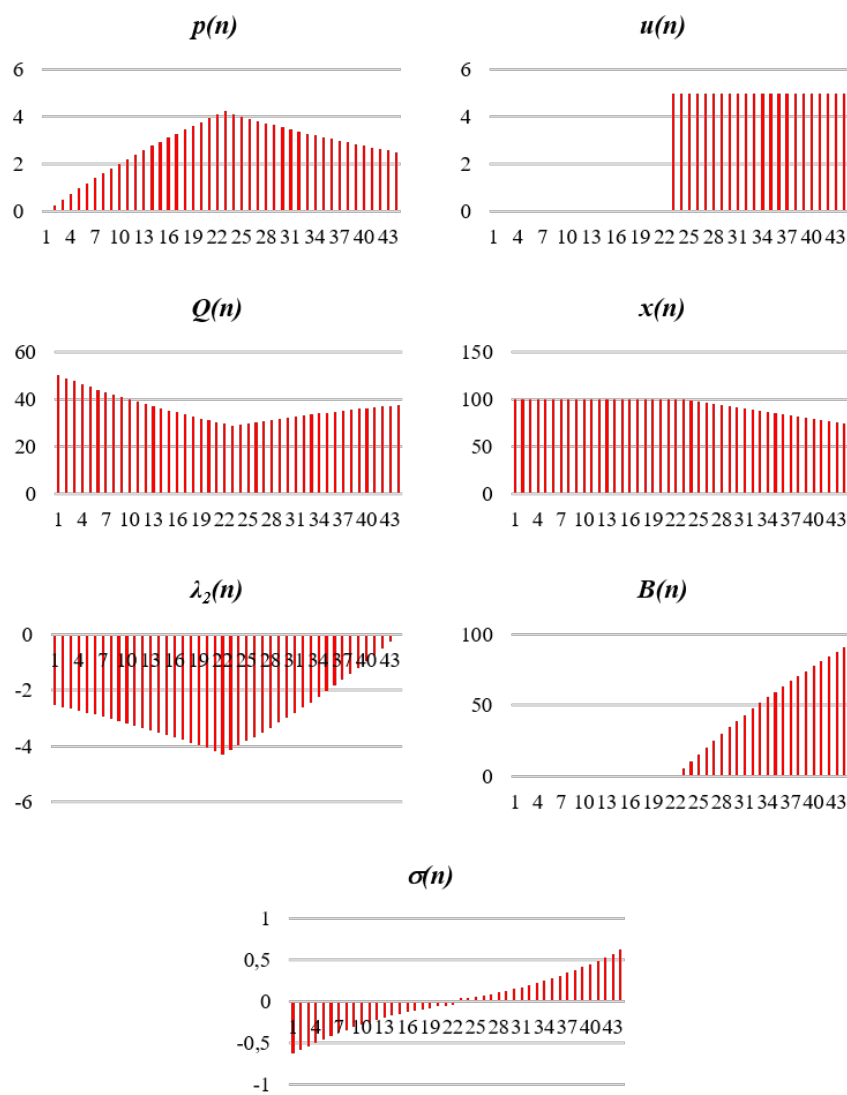


Figura 32: Representació gràfica simulació cas 29

Bibliografia

- [1] KALLE SMIT, *The Optimal Extraction Rate of Non-Renewable Resources Using Pontryagin's Maximum Principle*, ETSEIB UPC, Memòria de TFM, Convocatòria: setembre del 2012.
Consultat *quotiens necesse est*
- [2] DONALD E. KIRK, *Optimal Control Theory, An Introduction*, DOVER PUBLICATIONS, INC., 1998
Consultat *quotiens necesse est*
- [3] ULF T. JÖNSSON, *Optimal Control, Lecture notes*, ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY (STOCKHOLM, SWEDEN), 2010
Consultat *quotiens necesse est*
- [4] ULF T. JÖNSSON, *Exercise Notes on Optimal Control Theory*, ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY (STOCKHOLM, SWEDEN), 2011
Consultat *quotiens necesse est*
- [5] ALAN ZINOBER, *Optimal Control Theory*, ETSEIB UPC, Barcelona Erasmus Course, Maig 2009
Consultat *quotiens necesse est*
- [6] ALBERT COROMINAS, *Using discrete-time mathematical programming to optimise the extraction rate of a durable non-renewable resource with a single primary supplier*, ETSEIB UPC, Setembre 2017
Consultat *quotiens necesse est*
- [7] ALBERT COROMINAS, Enric Fossas, *Optimising the extraction rate of a non-durable non-renewable resource in a monopolistic market: a mathematical programming approach*, ETSEIB UPC, 2015
Consultat *quotiens necesse est*
- [8] LAWRENCE C. EVANS *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, University of California, Berkeley, 2013
Consultat *quotiens necesse est*